
LA CATÉGORIE DES ARBRES ÉLAGUÉS DE BATANIN EST DE KOSZUL

par

Benoit Fresse

Résumé. — La définition de la catégorie des arbres élagués, dont les objets sont des arbres planaires à n -niveaux avec toutes les feuilles au niveau supérieur, a été dégagée dans les travaux de M. Batanin, en partie pour comprendre la structure cellulaire de certaines E_n -opérades en termes catégoriques. Le but de cet article est de montrer que la version enrichie en \mathbb{k} -modules de la catégorie des arbres élagués est de Koszul. Ce résultat nous donne un modèle différentiel gradué minimal de cette catégorie, des petits complexes pour calculer des foncteurs Tor et Ext dans les catégories de diagrammes qui lui sont associés, et permet d'étendre aux E_n -algèbres un résultat de M. Livernet et B. Richter sur l'interprétation des constructions bar itérées en termes de foncteurs Tor catégoriques.

Abstract (Batanin's category of pruned trees is Koszul). — The category of pruned trees has been defined by M. Batanin with the aim of understanding the cell structure of certain E_n -operads in categorical terms. The objects of this category are planar trees with n levels so that all leaves are at the top level of the tree. The goal of this article is to prove that the category of pruned trees is Koszul. This result gives us a minimal differential graded model of this category, small complexes to computing Tor and Ext functors in associated categories of diagrams, and allows us to extend to E_n -algebras a result of M. Livernet and B. Richter about the interpretation of iterated bar complexes in terms of categorical Tor functors.

Introduction

La catégorie ensembliste des arbres élagués à n -niveaux, que l'on notera Ω_n^{epi} , est une sous-catégorie de la catégorie des arbres Ω_n qui est définie dans les travaux de M. Batanin sur les ω -catégories faibles [1]. Les éléments de Ω_n représentent, dans l'idée de [1], des schémas de compositions dans les catégories supérieures (on renvoie également aux articles [4, 15] pour des points de vue différents sur cette idée). La catégorie Ω_n^{op} , opposée à Ω_n , possède aussi une définition purement combinatoire,

Classification mathématique par sujets (2000). — Primary: 57T30; Secondary: 05C05, 18G15, 18G55, 18D20, 55P48, 06A11.

Recherche soutenue en partie par le contrat ANR-06-JCJC-0042 “OBTH”.

en termes de produits en couronne itérés de la catégorie simpliciale, qui est utilisée dans [6] pour montrer qu'une localisation de la catégorie des Ω_n^{op} -espaces définit un modèle de la catégorie des espaces de lacets n -itérés.

Les objets de Ω_n sont des arbres planaires à n -niveaux. Les objets de Ω_n^{epi} sont les arbres de Ω_n dont toutes les feuilles sont situées au niveau supérieur. Les notions de code-barres [11] et d'ordre complémentaire [17] qui apparaissent dans la définition de certaines E_n -opérades correspondent à différentes représentations des objets de Ω_n^{epi} . L'interprétation de ces catégories d'objets en termes de catégories supérieures permet, selon M. Batanin [2, 3], d'obtenir une caractérisation intrinsèque du type d'homotopie des E_n -opérades, du moins dans le cadre topologique.

Les objets de Ω_n^{epi} interviennent également dans le modèle de Milgram des espaces de lacets itérés [5, 22], dans les travaux de Fox et Neuwirth sur la présentation des groupes de tresses d'Artin [9], et dans la définition des complexes bar itérés [10].

On considère dans cet article la version enrichie en \mathbb{k} -modules de Ω_n^{epi} , pour un anneau de base fixé \mathbb{k} . Cette catégorie elle-même peut se regarder comme une catégorie enrichie en modules différentiels gradués (une dg-catégorie) concentrée en degré 0. Les constructions usuelles de l'algèbre différentielle graduée ont une généralisation naturelle dans le cadre des dg-catégories. On peut ainsi définir un analogue catégorique des constructions bar et cobar classiques de l'algèbre, puis définir un analogue des complexes de Koszul de [23] pour les catégories munies d'une graduation en poids, et étendre la notion d'algèbre de Koszul, telle qu'elle est définie dans [23], aux catégories. On notera $dg\ Cat_{\Omega_n^{epi}}$ la catégorie des dg-catégories Θ qui ont $\text{Ob } \Theta = \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ comme ensemble d'objets.

Le premier objectif de cet article est de montrer que la catégorie Ω_n^{epi} est de Koszul : l'homologie de sa construction bar $B(\Omega_n^{epi})$ se réduit à une cocatégorie enrichie en \mathbb{k} -modules gradués $K(\Omega_n^{epi})$ dont les éléments $\alpha \in K(\Omega_n^{epi})(\underline{\iota}, \underline{\sigma})$ représentent des cycles de degré maximal dans le complexe $B(\Omega_n^{epi})(\underline{\iota}, \underline{\sigma})$, pour tout couple d'objets $(\underline{\iota}, \underline{\sigma}) \in \text{Ob } \Omega_n^{epi} \times \text{Ob } \Omega_n^{epi}$. Ce résultat nous permettra d'obtenir :

- (1) un complexe naturel minimal $K(S, \Omega_n^{epi}, T)$ pour calculer les foncteurs $\text{Tor}_*^{\Omega_n^{epi}}(S, T)$ sur les catégories de diagrammes associées à Ω_n^{epi} , ainsi qu'un complexe de cochaînes naturel minimal $C(S, \Omega_n^{epi}, T)$ pour calculer les foncteurs $\text{Ext}_{\Omega_n^{epi}}^*(S, T)$;
- (2) un modèle cofibrant minimal de Ω_n^{epi} dans $dg\ Cat_{\Omega_n^{epi}}$, donné par une construction cobar $B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ sur la cocatégorie $K(\Omega_n^{epi})$.

La construction bar de Ω_n^{epi} dans $dg\ Cat_{\Omega_n^{epi}}$ s'identifie en fait au complexe de chaînes du nerf de la version ensembliste de Ω_n^{epi} . Le résultat obtenu dans cet article permet donc de déterminer l'homologie du nerf de Ω_n^{epi} .

On ne suit pas le plan habituel pour montrer qu'une algèbre est de Koszul. On définit d'abord une cocatégorie $K(\Omega_n^{epi})$ de façon directe que l'on forme avec les \mathbb{k} -modules duaux (décalés en degré) des \mathbb{k} -modules engendrés par les morphismes ensemblistes de Ω_n^{epi} . On définit aussi un complexe $K(S, \Omega_n^{epi}, T)$ de façon directe, à partir de cette cocatégorie $K(\Omega_n^{epi})$. On démontre, en étendant un argument de [19], que ce complexe satisfait une propriété d'acyclicité, ce qui entraîne indirectement que

la catégorie Ω_n^{epi} est de Koszul, et que la cocatégorie $K(\Omega_n^{epi})$, duale de Ω_n^{epi} dans les \mathbb{k} -modules, est aussi la cocatégorie duale de Ω_n^{epi} au sens de la dualité de Koszul des catégories. On en déduit ensuite que les propriétés (1-2) ci-dessus sont satisfaites pour cette cocatégorie $K(\Omega_n^{epi})$, que nous avons défini de façon directe, et le complexe $K(S, \Omega_n^{epi}, T)$ qui lui est associé.

Cette article comprend une section préliminaire pour fixer le cadre de nos constructions, deux parties principales 1-2, et une section de conclusion.

La section préliminaire servira principalement à préciser nos conventions de base sur les modules différentiels gradués.

La Partie 1 est consacrée à la démonstration de la propriété de Koszul et aux applications du point (1). La définition de la catégorie des arbres élagués Ω_n^{epi} est rappelée au début de cette partie. On introduit ensuite la cocatégorie $K(\Omega_n^{epi})$, puis les complexes à coefficients $K(S, \Omega_n^{epi}, T)$, avant de prouver les résultats annoncés.

Pour cette partie du travail, on n'aura besoin que des notions de base de l'algèbre homologique – complexes, foncteurs Tor, suites spectrales – dans le cadre additif des catégories de Ω_n^{epi} -diagrammes. Cependant, pour des raisons de cohérence avec la suite de l'article, on utilisera la terminologie d'équivalence faible - issue du langage des catégories modèles - pour désigner tout morphisme d'objets différentiels gradués induisant un isomorphisme en homologie. En outre, on parlera de modules différentiels gradués (dg-modules en abrégé) pour désigner les objets de notre catégorie de base plutôt que de complexes de chaînes. En fait, on réservera la terminologie de complexe à certaines constructions spécifiques sur les modules différentiels gradués. On renvoie le lecteur à la section préliminaire pour un exposé rapide de nos conventions.

La Partie 2 est consacrée à la définition du modèle cofibrant de Ω_n^{epi} , que l'on a annoncée en (2), et aux applications de ce modèle pour la définition d'une bonne catégorie de Ω_n^{epi} -diagrammes homotopiques. On commencera cette partie par une section d'introduction exposant, dans le cadre conceptuel de l'algèbre homotopique, les applications des constructions de l'algèbre différentielle graduée aux dg-catégories.

Le but initial de ce travail était d'étendre aux E_n -algèbres un résultat de M. Livernet et B. Richter sur l'interprétation des constructions bar itérées en termes de foncteurs Tor-catégoriques [19]. Ces applications seront abordées dans la section de conclusion de cet article.

Remerciements. — Je remercie Muriel Livernet pour une série de discussions qui sont à l'origine de ce travail. Je la remercie aussi, ainsi que Bernhard Keller et Éric Hoffbeck, pour des remarques et questions sur la version préliminaire du manuscrit qui m'ont permis d'améliorer la présentation de certaines constructions.

Cadre général

Pour commencer, on reprend la définition de la catégorie des modules différentiels gradués qui fournira le cadre de nos constructions, et on revoit rapidement la définition de sa structure de catégorie modèle. On rappelle aussi des constructions fondamentales – produit tensoriel des modules différentiels gradués, hom-interne, suspension et torsion - qui seront utilisées tout au long de l'article.

0.1. Catégories de dg-modules. — On travaille sur un anneau de base fixé \mathbb{k} . On utilisera la catégorie des \mathbb{k} -modules et la catégorie des modules différentiels gradués sur \mathbb{k} comme catégories de base. La catégorie des modules différentiels gradués (on dira dg-modules pour abréger) sera notée $dg\text{-Mod}$. On suppose par convention qu'un dg-module de $dg\text{-Mod}$ est gradué inférieurement et possède une différentielle interne $\delta : C \rightarrow C$ qui diminue le degré de 1. Un \mathbb{k} -module peut se voir comme un dg-module concentré en degré 0.

On garde aussi la convention habituelle de nos articles qui est de supposer que les dg-modules de $dg\text{-Mod}$ sont \mathbb{Z} -gradués. Le lecteur pourra faire un choix inverse et supposer que les dg-modules de notre catégorie de base sont concentrés en degré $* \geq 0$, mais certaines constructions (les foncteurs de dg-modules d'homomorphismes notamment) produisent naturellement des modules \mathbb{Z} -gradués.

0.2. Structures tensorielles et homomorphismes de dg-modules. — On munit la catégorie des dg-modules de son produit tensoriel usuel

$$\otimes : dg\text{-Mod} \times dg\text{-Mod} \rightarrow dg\text{-Mod},$$

qui en fait une catégorie monoïdale symétrique, avec l'isomorphisme de symétrie $\tau : C \otimes D \rightarrow D \otimes C$ défini par la règle des signes. On utilisera la notation \pm pour désigner tout signe produit par une application de cet isomorphisme de symétrie.

La catégorie $dg\text{-Mod}$ possède un hom-interne

$$\text{Hom}_{dg\text{-Mod}}(-, -) : dg\text{-Mod}^{\text{op}} \times dg\text{-Mod} \rightarrow dg\text{-Mod}$$

et forme donc une catégorie monoïdale symétrique fermée.

Le dg-module $\text{Hom}_{dg\text{-Mod}}(C, D)$ est engendré en degré d par les morphismes de \mathbb{k} -modules $f : C \rightarrow D$ qui augmentent le degré de d . La différentielle de $f : C \rightarrow D$ dans $\text{Hom}_{dg\text{-Mod}}(C, D)$ est donnée par le commutateur gradué de f avec les différentielles internes :

$$\delta(f) = \delta f - \pm f \delta.$$

Le signe \pm est déterminé par la commutation de f , de degré d , avec le symbole de différentielle interne δ , de degré -1 . Donc, dans cette formule, on a $\pm = (-1)^{\deg f}$. On utilise la terminologie d'homomorphisme de dg-modules pour désigner les éléments de ce dg-hom $\text{Hom}_{dg\text{-Mod}}(C, D)$ et les distinguer des morphismes actuels de la catégorie des dg-modules.

Le dg-hom $\text{Hom}_{dg\text{-Mod}}(C, D)$ est naturellement \mathbb{Z} -gradué, même lorsque les dg-modules sont concentrés en degré $* \geq 0$. On peut prendre une troncature en degré $* \geq 0$ de ce dg-module pour construire un hom interne dans la catégorie des dg-modules \mathbb{N} -gradués, cependant c'est toujours de la version \mathbb{Z} -graduée du dg-hom $\text{Hom}_{dg\text{-Mod}}(C, D)$ dont on aura besoin dans l'article.

0.3. Suspension et désuspension des dg-modules. — Soit $\mathbb{k}[d]$ le dg-module de rang 1 concentré en degré d , muni d'une différentielle évidemment triviale. On associe à tout dg-module C le dg-module décalé $C[d]$ tel que $C[d] = \mathbb{k}[d] \otimes C$. Pour $d = 1$, on obtient ainsi l'opération de suspension des dg-modules $\Sigma C = \mathbb{k}[1] \otimes C$. Pour $d = -1$, on obtient l'opération de désuspension $\Sigma^{-1}C = \mathbb{k}[-1] \otimes C$. Ces opérations seront utilisées au §6.

0.4. Homomorphismes de torsion de dg-modules. — On utilise dans certaines constructions des dg-modules C munis d'un homomorphisme $\partial : C \rightarrow C$, de degré -1 , qui additionné à la différentielle interne de C définit une nouvelle différentielle $\delta + \partial : C \rightarrow C$ sur le module gradué sous-jacent à C . On obtient ainsi un nouveau dg-module que l'on désignera par la donnée du couple (C, ∂) . La relation $(\delta + \partial)^2 = 0$, nécessaire pour que la différentielle de (C, ∂) soit bien définie, est équivalente à l'équation $\delta\partial + \partial\delta + \partial^2 = 0$ puisque la différentielle interne de C vérifie déjà $\delta^2 = 0$. On dit alors que ∂ est un homomorphisme de torsion du dg-module C . On note que la relation $\delta\partial + \partial\delta + \partial^2 = 0$ s'interprète comme une identité

$$\delta(\partial) + \partial^2 = 0$$

dans $\text{Hom}_{dg\text{-Mod}}(C, C)$.

0.5. Complexes de dg-modules. — On utilisera la terminologie de complexe pour des dg-modules tordus particuliers (C, ∂) naturellement définis par des suites

$$(*) \quad \cdots \rightarrow C_d \xrightarrow{\partial} C_{d-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{\partial} C_0$$

comme dans l'algèbre homologique classique. Les exemples considérés dans l'article comprennent : la construction bar $B(\Omega_n^{epi})$, la version à coefficients de la construction bar $B(S, \Omega_n^{epi}, T)$, et les constructions de Koszul correspondantes.

Les composantes C_d d'une telle suite $(*)$ sont en général des dg-modules qui possèdent eux-mêmes une graduation et une différentielle interne $\delta : C_d \rightarrow C_d$. Le dg-module tordu associé à la suite $(*)$ est alors défini par la somme de ces dg-modules $C = \bigoplus_{d=0}^{\infty} C_d$ avec un homomorphisme de torsion induit par composante par composante par les homomorphismes $\partial : C_d \rightarrow C_{d-1}$ donnés dans la suite $(*)$. On ne suppose pas nécessairement que ces homomorphismes vérifient $\partial^2 = 0$. On aura seulement besoin de la relation $\delta(\partial) + \partial^2 = 0$ du §0.4 pour que le dg-module tordu (C, ∂) soit bien défini.

Si la suite $(*)$ est constituée de \mathbb{k} -modules, sans graduation ni différentielle interne, alors on identifie tacitement chaque composante C_d à un dg-module concentré en degré d pour appliquer notre définition. La composante de degré $*$ de (C, ∂) s'identifie alors au \mathbb{k} -module donné C_* et la différentielle de (C, ∂) se réduit à la somme des homomorphismes $\partial : C_* \rightarrow C_{*-1}$ donnés dans la suite $(*)$.

La composante de degré $*$ du dg-module tordu (C, ∂) associé à une suite $(*)$ est, dans le cas général, constituée de la somme des composantes de degré $*$ de chacun des dg-modules C_d , $d \in \mathbb{N}$. On parlera alors de la *composante de degré d du complexe* (C, ∂) pour désigner le dg-module C_d et éviter toute équivoque.

0.6. Le langage des catégories modèles. — On munit la catégorie des dg-modules de sa structure modèle projective standard, telle qu'elle est définie dans [13, §2], de sorte qu'un morphisme de dg-modules $f : C \rightarrow D$ forme :

- une équivalence faible s'il induit un isomorphisme en homologie ;
- une fibration s'il est surjectif en tout degré ;
- une cofibration s'il possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux fibrations acycliques (les fibrations qui sont des équivalences faibles).

On renvoie le lecteur débutant à [13] pour un exposé complet sur les applications des catégories modèles aux dg-modules. Rappelons simplement que les cofibrations de dg-modules se définissent de façon effective comme des rétracts d'inclusions $i : C \rightarrow (C \oplus E, \partial)$ où $D = (C \oplus E, \partial)$ est un module tordu tel que $E = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{k} e_\alpha$ est un \mathbb{k} -module gradué libre (sans différentielle interne) muni d'une filtration définie au niveau de sa base

$$0 = \underbrace{\bigoplus_{\alpha \in \Lambda_0} \mathbb{k} e_\alpha}_{E_0} \subset \cdots \subset \underbrace{\bigoplus_{\alpha \in \Lambda_\lambda} \mathbb{k} e_\alpha}_{E_\lambda} \subset \cdots \subset \operatorname{colim}_{\lambda \in \mathbb{N}} \left\{ \bigoplus_{\alpha \in \Lambda_\lambda} \mathbb{k} e_\alpha \right\} = E$$

de sorte que l'homomorphisme de torsion vérifie $\partial(C) = 0$ et $\partial(E_\lambda) \subset C \oplus E_{\lambda-1}$, pour tout $\lambda > 0$. Cette caractérisation nous permet de voir aisément que le dg-module tordu $D = (C, \partial)$ formé à partir d'un complexe de \mathbb{k} -modules projectifs, ou plus généralement à partir d'un complexe de dg-modules cofibrants, définit lui-même un objet cofibrant de la catégorie des dg-modules (rappelons qu'un objet D est cofibrant lorsque le morphisme initial $0 \rightarrow D$ est une cofibration).

On adoptera la terminologie de dg-cofibration pour désigner tout morphisme, défini à l'intérieur d'une catégorie, qui par oubli de structure définit une cofibration dans la catégorie des dg-modules. On utilisera des conventions similaires en parlant de dg-modules cofibrants et d'objets dg-cofibrants. On supposera généralement que les objets considérés dans ce travail sont dg-cofibrants. Cette précaution est superflue lorsque l'anneau de base est un corps car tout les dg-modules sur \mathbb{k} sont alors cofibrants.

On utilisera le langage des catégories modèles tout au long de l'article, même si on n'aura besoin - dans la première partie de l'article du moins - que des idées de l'algèbre homologique classique.

Partie 1. Le complexe de Koszul des la catégorie des arbres élagués

Cette partie est consacrée à l'étude des complexes de Koszul $K(S, \Omega_n^{epi}, T)$ et aux applications de ces complexes pour le calcul des foncteurs Tor dans les catégories de Ω_n^{epi} -diagrammes. D'abord (au §1) on rappelle la définition de la catégorie des arbres élagués Ω_n^{epi} . Ensuite (au §2) on donne une définition ad-hoc de la construction de Koszul associée à cette catégorie et on montre que cette construction $K(\Omega_n^{epi})$ se plonge dans le complexe bar usuel $B(\Omega_n^{epi})$ dont on rappelle également la définition. Puis (aux §§3-4) on définit et étudie les versions à coefficients de la construction de Koszul de Ω_n^{epi} . On explique que ces complexes de Koszul $K(S, \Omega_n^{epi}, T)$ sont faiblement équivalents aux constructions bar à coefficients $B(S, \Omega_n^{epi}, T)$ et permettent de déterminer des foncteurs $\operatorname{Tor}_*^{\Omega_n^{epi}}(S, T)$ dès lors que certains de ces complexes sont acycliques, ce que l'on démontre dans la section finale de cette partie (au §5).

1. La catégorie des arbres élagués. — On reprend dans cette section la définition de la catégorie des arbres élagués Ω_n^{epi} telle qu'elle apparaît dans les travaux de M. Batanin [2, 3]. On revoit aussi la définition d'une catégorie comma,

formée à partir de Ω_n^{epi} , qui intervient dans notre travail sur les complexes bar itérés [10]. On fera des rappels supplémentaires sur ces définitions en cours d'article.

On renvoie aux références citées dans l'introduction et à la bibliographie de [2, 3] pour d'autres présentations de la catégorie des arbres élagués et de ses variantes.

1.1. La catégorie des arbres élagués : définition formelle et représentation graphique.

— On note $\underline{\tau}$ l'ensemble ordonné $\underline{\tau} = \{1 < \dots < r\}$.

Les objets de Ω_n^{epi} , désignés par des lettres grecques soulignées $\underline{\tau}$, sont les suites de surjections croissantes

$$\underline{\tau}_0 \xrightarrow{\tau_1} \underline{\tau}_1 \xrightarrow{\tau_2} \dots \xrightarrow{\tau_n} \underline{\tau}_n = *$$

avec l'ensemble final $* = \underline{1}$ comme dernier ensemble but. Une telle suite de surjections définit un arbre planaire dont les sommets sont arrangés sur des niveaux $0, \dots, n$: l'ensemble $\underline{\tau}_i$ définit l'ensemble des sommets au niveau i de l'arbre, ordonnés de la gauche vers la droite ; la surjection τ_i définit l'ensemble des arêtes des sommets de niveau $i - 1$ vers les sommets de niveau i . Un exemple, représentant une suite de surjections de la forme

$$\underline{3} \xrightarrow{\tau_1} \underline{2} \xrightarrow{\tau_2} \underline{2} \xrightarrow{\tau_3} \underline{1} \xrightarrow{\tau_4} \underline{1},$$

est donné Figure 1.

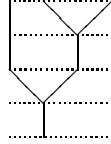


FIGURE 1.

Un morphisme de Ω_n^{epi}

$$\{\underline{\tau}_0 \xrightarrow{\tau_1} \underline{\tau}_1 \xrightarrow{\tau_2} \dots \xrightarrow{\tau_n} \underline{\tau}_n\} \xrightarrow{u} \{\underline{s}_0 \xrightarrow{\sigma_1} \underline{s}_1 \xrightarrow{\sigma_2} \dots \xrightarrow{\sigma_n} \underline{s}_n\}$$

est une suite d'applications surjectives $u : \underline{\tau}_i \rightarrow \underline{s}_i$ telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{\tau}_0 & \xrightarrow{\tau_1} & \underline{\tau}_1 & \xrightarrow{\tau_2} & \dots & \xrightarrow{\tau_n} & \underline{\tau}_n \\ u \downarrow & & u \downarrow & & & & u \downarrow \\ \underline{s}_0 & \xrightarrow{\sigma_1} & \underline{s}_1 & \xrightarrow{\sigma_2} & \dots & \xrightarrow{\sigma_n} & \underline{s}_n \end{array}$$

commute et $u : \underline{\tau}_i \rightarrow \underline{s}_i$ est croissante sur chaque sous-ensemble $\tau_{i+1}^{-1}(x) \subset \underline{\tau}_i$, pour $x \in \underline{\tau}_{i+1}$.

On utilise la notation $In \underline{\tau}$ pour désigner l'ensemble source $In \underline{\tau} = \underline{\tau}_0$ de la première surjection d'un objet $\underline{\tau} \in \Omega_n^{epi}$. L'application $In : \underline{\tau} \mapsto In \underline{\tau}$ définit un foncteur de Ω_n^{epi} dans la catégorie $Surj$ constituée des ensembles finis avec les applications surjectives comme morphismes.

1.2. *Le poset des arbres élagués avec une source fixée.* — On utilise dans [10] la catégorie comma $\underline{\mathbf{e}}/\Omega_n^{epi}$ (notée $\Pi^n(\underline{\mathbf{e}})$ dans [10, §A]), associée à chaque ensemble fini $\underline{\mathbf{e}}$, et dont les objets sont les suites

$$\underline{\mathbf{e}} \xrightarrow{\tau_0} \underline{\mathbf{t}}_0 \xrightarrow{\tau_1} \cdots \xrightarrow{\tau_n} \underline{\mathbf{t}}_n = *$$

telles que $\underline{\tau} = \{\underline{\mathbf{t}}_0 \xrightarrow{\tau_1} \cdots \xrightarrow{\tau_n} \underline{\mathbf{t}}_n\}$ définit un élément de Ω_n^{epi} et $\{\underline{\mathbf{e}} \xrightarrow{\tau_0} \underline{\mathbf{t}}_0\}$ définit un morphisme $\tau_0 : \underline{\mathbf{e}} \rightarrow In \underline{\tau}$ dans la catégorie des surjections *Surj*. L'application $\tau_0 : \underline{\mathbf{e}} \rightarrow \underline{\mathbf{t}}_0$ se représente dans l'arbre associé à $\underline{\tau}$ par un étiquetage des noeuds de niveau 0 par les sous-ensembles $\tau_0^{-1}(x)$, pour $x \in \underline{\mathbf{t}}_0$, comme dans l'exemple de la Figure 2.

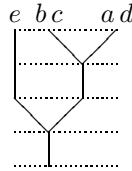


FIGURE 2. Un arbre élagué étiqueté. Dans cet exemple, on a $\underline{\mathbf{e}} = \{a, b, c, d, e\}$, et la surjection $\tau_0 : \underline{\mathbf{e}} \rightarrow \underline{\mathbf{t}}_0$ est définie par $\tau_0(e) = 1$, $\tau_0(b) = \tau_0(c) = 2$ et $\tau_0(a) = \tau_0(d) = 3$.

Une suite d'applications surjectives $u : \underline{\mathbf{t}}_i \rightarrow \underline{\mathbf{s}}_i$ définit un morphisme dans la catégorie comma

$$\{\underline{\mathbf{e}} \xrightarrow{\tau_0} \underline{\mathbf{t}}_0 \xrightarrow{\tau_1} \cdots \xrightarrow{\tau_n} \underline{\mathbf{t}}_n\} \xrightarrow{u} \{\underline{\mathbf{e}} \xrightarrow{\sigma_0} \underline{\mathbf{s}}_0 \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_n} \underline{\mathbf{s}}_n\}$$

si chaque application $u : \underline{\mathbf{t}}_i \rightarrow \underline{\mathbf{s}}_i$ est croissante sur les sous-ensembles $\tau_{i+1}^{-1}(x) \subset \underline{\mathbf{t}}_i$, $x \in \underline{\mathbf{t}}_{i+1}$ (condition pour avoir un morphisme dans Ω_n^{epi}), et le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc} \underline{\mathbf{e}} & \xrightarrow{\tau_0} & \underline{\mathbf{t}}_0 & \xrightarrow{\tau_1} & \underline{\mathbf{t}}_1 & \xrightarrow{\tau_2} & \cdots & \xrightarrow{\tau_n} & \underline{\mathbf{t}}_n \\ \downarrow & & \downarrow u & & \downarrow u & & & & \downarrow u \\ \underline{\mathbf{e}} & \xrightarrow{\sigma_0} & \underline{\mathbf{s}}_0 & \xrightarrow{\sigma_1} & \underline{\mathbf{s}}_1 & \xrightarrow{\sigma_2} & \cdots & \xrightarrow{\sigma_n} & \underline{\mathbf{s}}_n \end{array}$$

commute dans son ensemble.

On montre dans [10, §A.7] que $\underline{\mathbf{e}}/\Omega_n^{epi}$ forme un poset : l'ensemble des morphismes dans $\underline{\mathbf{e}}/\Omega_n^{epi}$ d'un objet source $\{\underline{\mathbf{e}} \xrightarrow{\tau_0} \underline{\mathbf{t}}_0 \xrightarrow{\tau_1} \cdots \xrightarrow{\tau_n} \underline{\mathbf{t}}_n\}$ vers un objet but donné $\{\underline{\mathbf{e}} \xrightarrow{\sigma_0} \underline{\mathbf{s}}_0 \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_n} \underline{\mathbf{s}}_n\}$ est soit vide, soit réduit à un unique élément, et dans ce dernier cas on écrit

$$\{\underline{\mathbf{e}} \xrightarrow{\tau_0} \underline{\mathbf{t}}_0 \xrightarrow{\tau_1} \cdots \xrightarrow{\tau_n} \underline{\mathbf{t}}_n\} \geq \{\underline{\mathbf{e}} \xrightarrow{\sigma_0} \underline{\mathbf{s}}_0 \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_n} \underline{\mathbf{s}}_n\}.$$

Ce résultat entraîne qu'un morphisme $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$ de la catégorie Ω_n^{epi} est entièrement déterminé par la donnée :

- d'un objet source $\underline{\tau} = \{\underline{\mathbf{t}}_0 \xrightarrow{\tau_1} \cdots \xrightarrow{\tau_n} \underline{\mathbf{t}}_n\}$,
- d'un objet but $\underline{\sigma} = \{\underline{\mathbf{s}}_0 \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_n} \underline{\mathbf{s}}_n\}$,
- et d'une application $u : In \underline{\tau} \rightarrow In \underline{\sigma}$,

de sorte qu'on a la relation

$$\{In \underline{\tau} \xrightarrow{\equiv} \underline{t}_0 \xrightarrow{\tau_1} \cdots \xrightarrow{\tau_n} \underline{t}_n\} \geq \{In \underline{\tau} \xrightarrow{u} \underline{s}_0 \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_n} \underline{s}_n\}$$

dans le poset $In \underline{\tau} / \Omega_n^{epi}$. On utilisera cette observation pour représenter graphiquement les morphismes de Ω_n^{epi} par la donnée de l'arbre source $\underline{\tau}$ et la donnée de l'arbre but $\underline{\sigma}$ étiqueté par les éléments de $In \underline{\tau}$, ou de tout ensemble de variables (muettes) \underline{e} mis en bijection avec $In \underline{\tau}$ (voir par exemple §5).

Remarque. — Les résultats que l'on obtiendra aux §§2-5 montrent que le poset $\underline{e} / \Omega_n^{epi}$ est de Cohen-Macaulay. On peut cependant observer qu'il n'admet pas de CL-shelling au sens de [7] sauf lorsque n ou le cardinal de \underline{e} sont petits.

1.3. La graduation de la catégorie des arbres élagués. — Dans nos constructions, on utilisera de façon essentielle que la catégorie des arbres élagués Ω_n^{epi} possède une graduation naturelle. On définit d'abord le degré d'un objet $\underline{\tau} \in \Omega_n^{epi}$, défini par une suite de surjections $\underline{t}_0 \xrightarrow{\tau_1} \cdots \xrightarrow{\tau_n} \underline{t}_n$, en posant :

$$\deg(\underline{\tau}) = t_0 + \cdots + t_{n-1}.$$

Graphiquement, cette expression représente le nombre de sommets de niveau $< n$ de l'arbre représentant $\underline{\tau}$, ou, de façon équivalente, le nombre d'arêtes de $\underline{\tau}$. Le degré d'un morphisme $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$ est ensuite défini par la différence :

$$\deg(u) = \deg(\underline{\tau}) - \deg(\underline{\sigma}),$$

représentant le nombre de sommets de $\underline{\tau}$ identifiés par u .

2. La construction de Koszul de la dg-catégorie des arbres élagués. — On a rappelé la définition de la catégorie des arbres élagués Ω_n^{epi} dans un cadre ensembliste au §1. On utilise maintenant une version enrichie en \mathbb{k} -modules de cette catégorie, avec le même ensemble d'objets, mais dont les hom-objets sont les \mathbb{k} -modules librement engendrés par les morphismes ensemblistes de Ω_n^{epi} . On gardera la même notation Ω_n^{epi} pour désigner cette catégorie enrichie en \mathbb{k} -modules. On réserve simplement la notation $\text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$ pour désigner l'ensemble des morphismes ensemblistes de Ω_n^{epi} et on prendra la notation $\Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$ pour désigner le \mathbb{k} -module des homomorphismes de la catégorie Ω_n^{epi} dans sa version enrichie. L'expression $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$ ne sera utilisée que pour désigner des morphismes ensemblistes $u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$. On a donc l'identité :

$$\Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) = \bigoplus_{u: \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}} \mathbb{k}\{u\},$$

en notant $\{u\}$ les éléments générateurs de $\Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$ associés aux morphismes ensemblistes $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$.

On montrera plus loin comment les constructions de l'algèbre différentielle graduée s'appliquent à cette catégorie enrichie en \mathbb{k} -modules Ω_n^{epi} , que l'on voit elle-même comme une dg-catégorie concentrée en degré 0. On utilisera en particulier une construction bar naturellement associée à toute dg-catégorie Θ qui a $\text{Ob } \Theta = \text{Ob } \Omega_n^{epi}$ comme ensemble d'objet. On expliquera que cette construction bar forme une dg-cocatégorie.

On se contente pour le moment de considérer des structures, appelées dg-graphes, définies par des collections de dg-modules $\Gamma(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$ indexées par les couples $(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) \in \text{Ob } \Omega_n^{epi} \times \text{Ob } \Omega_n^{epi}$.

La construction bar (normalisée réduite) de Ω_n^{epi} est le dg-graphe $B(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$ engendré en degré d par les d -uplets de morphismes composables

$$\{\underline{\tau}_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_d} \underline{\tau}_d\} \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}_1, \underline{\tau}_0) \times \cdots \times \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}_d, \underline{\tau}_{d-1})$$

satisfaisant la condition de non-dégénérescence $u_i \neq \text{id}$, $\forall i$, et tels que $(\underline{\tau}_d, \underline{\tau}_0) = (\underline{\tau}, \underline{\sigma})$, avec la différentielle définie par la formule usuelle

$$\partial\{\underline{\tau}_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_d} \underline{\tau}_d\} = \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^i \{\underline{\tau}_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_i u_{i+1}} \cdots \xleftarrow{u_d} \underline{\tau}_d\},$$

pour tout élément $\{\underline{\tau}_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_d} \underline{\tau}_d\} \in B(\Omega_n^{epi})$. La construction bar définit un complexe au sens du §0.5.

Le but principal de cette section est de construire un sous-objet de $B(\Omega_n^{epi})$, la construction de Koszul $K(\Omega_n^{epi})$, dont les éléments représenteront des cycles de degré maximal dans les différentes composantes de la construction bar $B(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$.

On verra plus loin que $K(\Omega_n^{epi})$ forme un sous-objet de $B(\Omega_n^{epi})$ dans la catégorie des dg-cocatégories. Cette cocatégorie $K(\Omega_n^{epi})$ est un analogue, dans le cadre des catégories, du dual de Koszul des algèbres associatives défini dans [23]. La méthode habituelle pour construire le dual de Koszul d'une algèbre A consiste à déterminer une présentation de A par générateurs et relations, puis à prendre des relations orthogonales pour définir la cogèbre $K(A)$. Dans notre cas, il sera plus simple de construire la cocatégorie $K(\Omega_n^{epi})$ de façon directe. L'identification de $K(\Omega_n^{epi})$ avec un dual de Koszul résultera alors de l'identité, établie au Théorème 7.A, d'une construction cobar $B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ avec un modèle minimal de Ω_n^{epi} . On appliquera en fait la dualité de Koszul en sens inverse pour obtenir une présentation par générateurs et relations de Ω_n^{epi} à partir de ce résultat.

On s'appuie néanmoins sur la graduation naturelle de Ω_n^{epi} pour définir $K(\Omega_n^{epi})$, comme dans la théorie classique de la dualité de Koszul des algèbres [23]. On commence par réviser la structure des morphismes de degré 1 de la catégorie des arbres à niveaux.

2.1. Les morphismes d'arbres élagués de degré 1. — Les observations de [19, Lemma 3.4] (voir également [10, §A.8]) impliquent que les morphismes de degré 1 de Ω_n^{epi} sont donnés par des diagrammes de la forme

$$\begin{array}{ccccccccccc} \underline{\tau}_0 & \xrightarrow{\tau_1} & \cdots & \xrightarrow{\tau_{k-1}} & \underline{\tau}_{k-1} & \xrightarrow{\tau_k} & \underline{\tau}_k & \xrightarrow{\tau_{k+1}} & \underline{\tau}_{k+1} & \xrightarrow{\tau_{k+2}} & \cdots & \xrightarrow{\tau_n} & \underline{\tau}_n \\ sh_0 \downarrow & & & & sh_{k-1} \downarrow & & d_a \downarrow & & id \downarrow & & & & id \downarrow & \\ \underline{\tau}_0 & \xrightarrow{\sigma_1} & \cdots & \xrightarrow{\sigma_{k-1}} & \underline{\tau}_{k-1} & \xrightarrow{\sigma_k} & \underline{\tau}_k - 1 & \xrightarrow{\sigma_{k+1}} & \underline{\tau}_{k+1} & \xrightarrow{\sigma_{k+2}} & \cdots & \xrightarrow{\sigma_n} & \underline{\tau}_n \end{array}$$

et que l'on construit de la façon suivante :

- (1) l'application $u_i : \underline{\tau}_i \rightarrow \underline{\tau}_i$ est l'identité pour $i > k$, ce qui implique la relation $\sigma_i = \tau_i$ pour $i > k + 1$;

(2) l'application d_a identifie deux sommets consécutifs $(a, a+1)$ d'une fibre $\tau_{k+1}^{-1}(b)$ au niveau k , de sorte que l'on a

$$d_a(x) = \begin{cases} x, & \text{pour } x = 1, \dots, a, \\ x-1, & \text{pour } x = a+1, \dots, s_k, \end{cases}$$

et nécessairement $\sigma_{k+1}(x) = \begin{cases} \tau_{k+1}(x), & \text{pour } x = 1, \dots, a, \\ \tau_{k+1}(x+1), & \text{pour } x = a+1, \dots, t_k-1; \end{cases}$

(3) puis, lorsque $k > 0$, on a nécessairement

$$\sigma_k^{-1}(x) = \begin{cases} \tau_k^{-1}(x), & \text{pour } x = 1, \dots, a-1, \\ \tau_k^{-1}(a) \cup \tau_k^{-1}(a+1), & \text{pour } x = a, \\ \tau_k^{-1}(x), & \text{pour } x = a+2, \dots, s_{k+1}, \end{cases}$$

ce qui détermine σ_k ; l'application sh_{k-1} au niveau $k-1$ est la juxtaposition des applications identiques sur les fibres $\tau_k^{-1}(x)$, $x \neq a, a+1$, avec une bijection

$$\tau_k^{-1}(a) \amalg \tau_k^{-1}(a+1) \xrightarrow{\cong} \sigma_k^{-1}(a)$$

préservant l'ordre entre les éléments de $\tau_k^{-1}(a)$ et $\tau_k^{-1}(a+1)$ (en d'autres termes, cette application est une permutation de battage) ;

(4) les applications $\sigma_i : \underline{t}_{i-1} \rightarrow \underline{t}_i$ et les bijections $sh_{i-1} : \underline{t}_{i-1} \rightarrow \underline{t}_{i-1}$ sont ensuite déterminées inductivement ; d'abord σ_i , par les relations $\sigma_i^{-1}(x) = \tau_i^{-1}(sh_i^{-1}(x))$, $x \in \underline{t}_i$; puis sh_{i-1} , par la relation $\sigma_i sh_{i-1} = sh_i \tau_i$ et la propriété de croissance sur les fibres $\tau_i^{-1}(x)$, $x \in \underline{t}_i$.

Un morphisme de degré 1 est donc entièrement déterminé, à partir de son domaine \underline{t} , par la fusion de deux sommets consécutifs $(a, a+1)$ sur une fibre $\tau_{k+1}^{-1}(b)$ de l'arbre \underline{t} et, lorsque $k > 0$, par une bijection

$$sh_{k-1} : \tau_k^{-1}(a) \amalg \tau_k^{-1}(a+1) \xrightarrow{\cong} \sigma_k^{-1}(a)$$

mélangeant les fibres de ces sommets.

La Figure 3 donne la représentation graphique schématique d'un tel morphisme de degré 1. La notation α (respectivement β) représente l'ensemble du sous-arbre au dessus du sommet fusionné a (respectivement, $b = a+1$). L'observation (4) de la construction formelle donnée dans ce paragraphe signifie graphiquement que l'ensemble du sous-arbre au dessus d'un sommet $x \in \tau_k^{-1}(a) \cup \tau_k^{-1}(b)$ est déplacé avec x . Le morphisme se comprend donc globalement comme une fusion des sommets a et $b = a+1$ et d'une permutation de battage des sous-arbres au dessus des sommets $x \in \tau_k^{-1}(a) \cup \tau_k^{-1}(b)$ que représente l'expression $sh(\alpha, \beta)$ dans la figure.

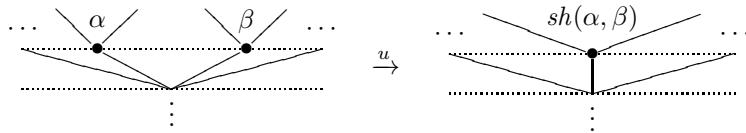


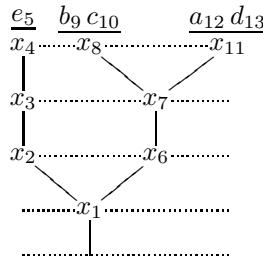
FIGURE 3.

Ces morphismes de degré 1 correspondent dans le formalisme de [10, §A.8] aux relations de recouvrement du poset $\underline{\mathbf{e}}/\Omega_n^{epi}$.

2.2. Signe des morphismes de degré 1. — Les morphismes de degré 1, avec un signe $\text{sgn}(u)$ associé à chaque morphisme u , déterminent les termes de la différentielle du complexe bar n -itéré $B^n(A)$ d'une algèbre commutative A (voir [10, Proposition A.10]). On utilise la relation de la catégorie Ω_n^{epi} avec le complexe bar n -itéré $B^n(A)$ pour définir le signe $\text{sgn}(u)$ associé à chaque morphisme u de façon indirecte dans [10], en renvoyant aux définitions de [21, §X.12] pour la construction bar des algèbres commutatives. Le but de ce paragraphe est de donner une définition directe de ce signe et dans un contexte généralisé.

On définit en fait un signe pour chaque morphisme de $\underline{\mathbf{e}}/\Omega_n^{epi}$, pour un ensemble d'entrées donné $\underline{\mathbf{e}}$, avec un degré $\deg(e)$ associé à chaque $e \in \underline{\mathbf{e}}$. Cette convention interviendra au §5. On pourra supposer que ce degré est nul jusqu'à ce que l'on fera tacitement dans les constructions qui suivront ce paragraphe, et on appliquera la définition de $\text{sgn}(u)$ aux morphismes $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$ de Ω_n^{epi} en prenant $\underline{\mathbf{e}} = \text{In } \underline{\tau}$ comme ensemble d'entrées.

On se donne un objet $\underline{\tau} \in \underline{\mathbf{e}}/\Omega_n^{epi}$. On associe un symbole de degré 1 à chaque sommet $x \in \underline{\tau}_i$ de niveau $i < n$ de $\underline{\tau}$ et on suppose que les entrées $e \in \underline{\mathbf{e}}$ de $\underline{\tau} \in \underline{\mathbf{e}}/\Omega_n^{epi}$ sont munies du degré $\deg(e)$ qui leur est associé. On ordonne ces éléments en parcourant l'arbre sommet par sommet, en suivant les arêtes du bas vers le haut, puis de gauche à droite, pour former un tenseur différentiel gradué associé à $\underline{\tau}$. On fixera simplement un ordre arbitraire pour les entrées $e \in \underline{\mathbf{e}}$ sur une même fibre $\tau_0^{-1}(k)$, $k \in \underline{\mathbf{t}_0}$, qui peuvent toujours être permutees dans la suite. Pour l'arbre de la Figure 2, on obtient ainsi l'ordre



et un tenseur de la forme

$$x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4 \otimes e_5 \otimes x_6 \otimes x_7 \otimes x_8 \otimes b_9 \otimes c_{10} \otimes x_{11} \otimes a_{12} \otimes d_{13}.$$

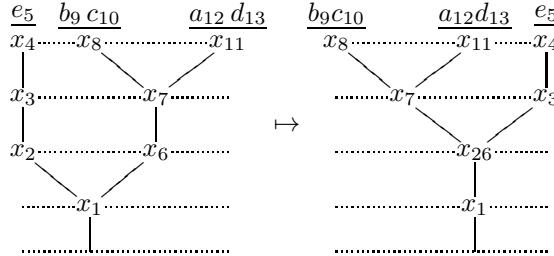
On se donne un morphisme $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$ de degré 1 fusionnant des sommets (x_i, x_j) dans $\underline{\tau}$. Le signe $\text{sgn}(u)$ se détermine par l'application des règles de l'algèbre différentielle graduée aux permutations de tenseurs impliquées dans l'opération de fusion définie par u . De fait, cette opération de fusion se décompose comme suit :

- (1) on part du tenseur défini par l'ordre de l'arbre source $\underline{\tau}$,
- (2) on place les sommets (x_i, x_j) en première position par une permutation de tenseurs,
- (3) on effectue la fusion,

(4) puis on effectue une nouvelle permutation de tenseurs pour remplacer les facteurs du produit tensoriel dans l'ordre fixé par l'arbre but $\underline{\alpha}$.

Le signe $\text{sgn}(u)$ est produit par les opérations (2) et (4).

Le signe associé au morphisme



est ainsi déterminé par les opérations

$$\begin{aligned}
& x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4 \otimes e_5 \otimes x_6 \otimes x_7 \otimes x_8 \otimes b_9 \otimes c_{10} \otimes x_{11} \otimes a_{12} \otimes d_{13} \\
\approx & x_2 \otimes x_6 \otimes x_1 \otimes x_3 \otimes x_4 \otimes e_5 \otimes x_7 \otimes x_8 \otimes b_9 \otimes c_{10} \otimes x_{11} \otimes a_{12} \otimes d_{13} \\
\mapsto & x_{26} \otimes x_1 \otimes x_3 \otimes x_4 \otimes e_5 \otimes x_7 \otimes x_8 \otimes b_9 \otimes c_{10} \otimes x_{11} \otimes a_{12} \otimes d_{13} \\
\approx & x_1 \otimes x_{26} \otimes x_7 \otimes x_8 \otimes b_9 \otimes c_{10} \otimes x_{11} \otimes a_{12} \otimes d_{13} \otimes x_3 \otimes x_4 \otimes e_5.
\end{aligned}$$

La première permutation de tenseurs produit un signe $(-1)^p$ d'exposant $p = 4 + \deg(e)$, la seconde un signe $(-1)^q$ d'exposant $q = 1 + (2 + \deg(e)) \cdot (3 + \deg(a) + \deg(b) + \deg(c) + \deg(d))$, et on somme ces exposants pour obtenir le signe de u .

2.3. *La construction de Koszul associée à la catégorie Ω_n^{epi} .* — On forme le dg-graphe $K(\Omega_n^{epi})$ défini par les dg-modules

$$K(\Omega_n^{epi})(\underline{\iota}, \underline{\sigma}) = \bigoplus_{u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\iota}, \underline{\sigma})} \mathbb{k}\{u\},$$

avec des éléments générateurs $\{u\}$ munis d'une différentielle triviale et du degré

$$\deg\{u\} = \deg(\underline{\tau}) - \deg(\underline{\sigma})$$

déduit de la graduation des arbres à niveau. On appelle ce dg-graphe la construction de Koszul de Ω_n^{epi} .

On considère l'application

$$K(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) \xrightarrow{\iota} B(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$$

qui applique un élément générateur $\{u\} \in K(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$ sur la somme

$$\iota\{u\} = \sum_{\substack{u=u_1 \cdots u_d \\ \deg u_1 = \cdots = \deg u_d = 1}} \underbrace{\operatorname{sgn}(u_1) \cdots \operatorname{sgn}(u_d)}_{\pm} \cdot \left\{ \tau_{\mathcal{I}_0} \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_d} \tau_{\mathcal{I}_d} \right\}$$

s'étendant sur l'ensemble des décompositions de u en morphismes de degré 1 dans la catégorie ensembliste Ω_n^{epi} . On observe que :

Proposition 2.4. — On a $\partial\iota\{u\} = 0$ dans $B(\Omega_n^{epi})$, de sorte que notre application définit un morphisme de dg-modules

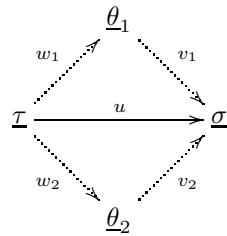
$$K(\Omega_n^{epi})(\underline{\iota}, \underline{\sigma}) \xrightarrow{\iota} B(\Omega_n^{epi})(\underline{\iota}, \underline{\sigma}),$$

pour tout couple $(\underline{\iota}, \underline{\sigma}) \in \text{Ob } \Omega_n^{epi} \times \text{Ob } \Omega_n^{epi}$.

Démonstration. — On prouve que tout morphisme de degré 2

$$\underline{\iota} \xrightarrow{u} \underline{\sigma}$$

possède exactement deux décompositions



avec $\deg v_1 = \deg v_2 = \deg w_1 = \deg w_2 = 1$, puis on constate que les signes

$$\text{sgn}(v_1) \text{sgn}(w_1) \quad \text{et} \quad \text{sgn}(v_2) \text{sgn}(w_2)$$

associés à ces décompositions sont opposés. Ceci suffit pour montrer que les termes du développement

$$\partial\iota\{u\} = \sum_{\substack{u=u_1 \dots u_d \\ \deg u_1 = \dots = \deg u_d = 1 \\ 1 \leq i \leq d-1}} \underbrace{\text{sgn}(u_1) \dots \text{sgn}(u_d)}_{\pm} \cdot \{\iota_0 \xleftarrow{u_1} \dots \xleftarrow{u_i u_{i+1}} \dots \xleftarrow{u_d} \iota_d\}$$

d'un morphisme u de degré d quelconque s'annulent deux à deux.

On généralise l'analyse du §2.1 pour déterminer un morphisme de degré 2 à partir de son domaine $\underline{\iota}$ et des sommets de $\underline{\iota}$ identifiés par u . On distingue trois cas.

On suppose d'abord que u fusionne trois sommets consécutifs $a, b = a+1, c = a+2$ sur une même fibre $\tau_k^{-1}(x)$. La Figure 4 donne la représentation schématique de ce morphisme et ses deux décompositions. L'expression $sh(\alpha, \beta, \gamma)$ représente une permutation de battage des sous-arbres (α, β, γ) . L'existence des deux décompositions résulte de l'existence d'uniques permutations de battages à deux composantes telles qu'on a la relation

$$sh(\alpha \cup \beta, \gamma) \cdot sh(\alpha, \beta) = sh(\alpha, \beta, \gamma) = sh(\alpha, \beta \cup \gamma) \cdot sh(\beta, \gamma)$$

dans le groupe des permutations de l'alphabet $\alpha \cup \beta \cup \gamma$.

On suppose maintenant que u fusionne un couple de sommets consécutifs $a, b = a+1$, sur une même fibre $\tau_k^{-1}(x)$, et un couple disjoint de sommets consécutifs $c, d = c+1$, sur une fibre $\tau_l^{-1}(y)$ avec éventuellement $x \neq y$ et $k \neq l$. La représentation schématique de ce morphisme et de ses décompositions est donnée Figure 5.

Un dernier cas correspond à la fusion d'un couple de sommets consécutifs $a, b = a+1$, sur une même fibre $\tau_k^{-1}(x)$, et d'un couple de sommets c et d tels que $c \in \tau_k^{-1}(a)$ et

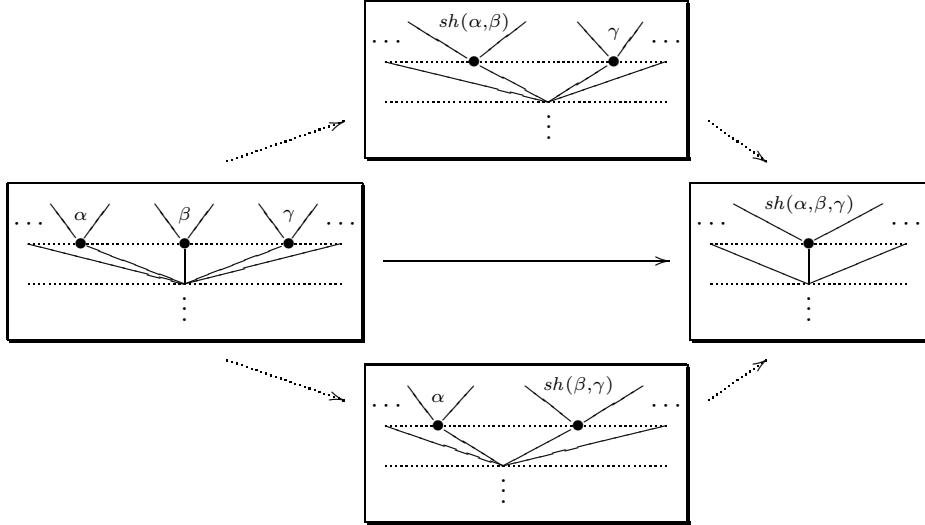


FIGURE 4.

$d \in \tau_k^{-1}(b)$. La représentation schématique de ce morphisme et de ses décompositions est donnée Figure 6.

On se convainc aisément qu'il n'y a pas d'autres possibilités que ces trois configurations.

On vérifie ensuite, par simple inspection des règles de permutation du §2.2, que les signes associés aux deux décompositions $u = v_1 w_1 = v_2 w_2$ d'un morphisme de degré 2 sont opposés dans chaque cas et ceci termine la démonstration de la proposition. \square

Notre objectif principal consiste maintenant à montrer que ce morphisme $\iota : K(\Omega_n^{epi}) \rightarrow B(\Omega_n^{epi})$ définit une équivalence faible. On introduit une version à coefficients des constructions $K(\Omega_n^{epi})$ et $B(\Omega_n^{epi})$ afin de démontrer ce résultat de façon indirecte, par des arguments de comparaison de complexes.

3. Complexes à coefficients. — Les versions à coefficients de $K(\Omega_n^{epi})$ et $B(\Omega_n^{epi})$ que l'on considère sont définies sur les catégories de Ω_n^{epi} -diagramme covariants et contravariants. Pour le moment, on ne considère que des Ω_n^{epi} -diagrammes en \mathbb{k} -modules, pour lesquels les définitions les plus classiques de l'algèbre homologique s'appliquent : rappelons simplement que la catégorie des Ω_n^{epi} -diagrammes covariants en \mathbb{k} -modules (et la catégorie des Ω_n^{epi} -diagrammes contravariants de même) est abélienne et possède un ensemble de générateurs projectifs définis par les diagrammes de Yoneda $\Omega_n^{epi}(\mathcal{I}, -)$. On étendra nos constructions au cadre différentiel gradué dans la section suivante.

3.1. Constructions à coefficients. — On se donne donc un Ω_n^{epi} -diagramme contravariant S et un Ω_n^{epi} -diagramme covariant T à valeurs dans les \mathbb{k} -modules. Le

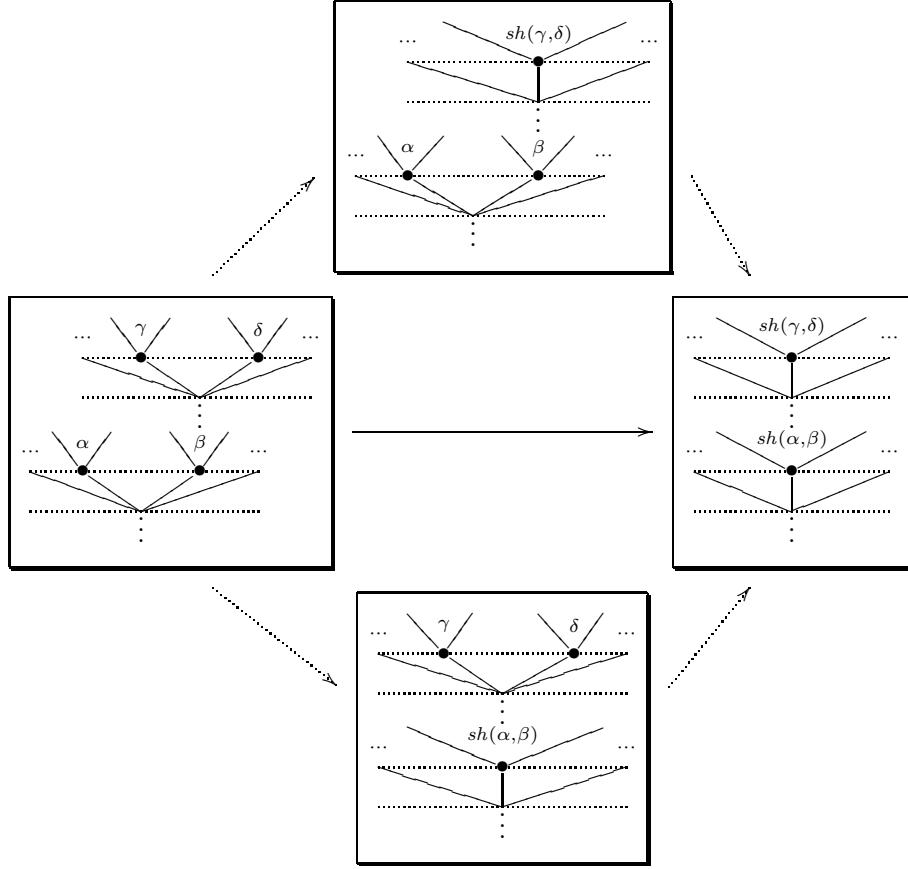


FIGURE 5.

complexe bar à coefficients $B(S, \Omega_n^{epi}, T)$ est défini par le \mathbb{k} -module

$$B(S, \Omega_n^{epi}, T)_d = \bigoplus_{(u_1, \dots, u_d)} S(\underline{\mathcal{I}}_0) \otimes \mathbb{k}\{\underline{\mathcal{I}}_0 \xleftarrow{u_1} \dots \xleftarrow{u_d} \underline{\mathcal{I}}_d\} \otimes S(\underline{\mathcal{I}}_d)$$

en degré d avec la différentielle donnée par la formule

$$\begin{aligned} \partial(x \otimes \{\underline{\mathcal{I}}_0 \xleftarrow{u_1} \dots \xleftarrow{u_d} \underline{\mathcal{I}}_d\} \otimes y) &= u_1^*(x) \otimes \{\underline{\mathcal{I}}_1 \xleftarrow{u_2} \dots \xleftarrow{u_d} \underline{\mathcal{I}}_d\} \otimes y \\ &+ \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^i x \otimes \{\underline{\mathcal{I}}_0 \xleftarrow{u_1} \dots \xleftarrow{u_i u_{i+1}} \dots \xleftarrow{u_d} \underline{\mathcal{I}}_d\} \otimes y \\ &+ (-1)^d x \otimes \{\underline{\mathcal{I}}_0 \xleftarrow{u_1} \dots \xleftarrow{u_{d-1}} \underline{\mathcal{I}}_{d-1}\} \otimes u_{d*}(y). \end{aligned}$$

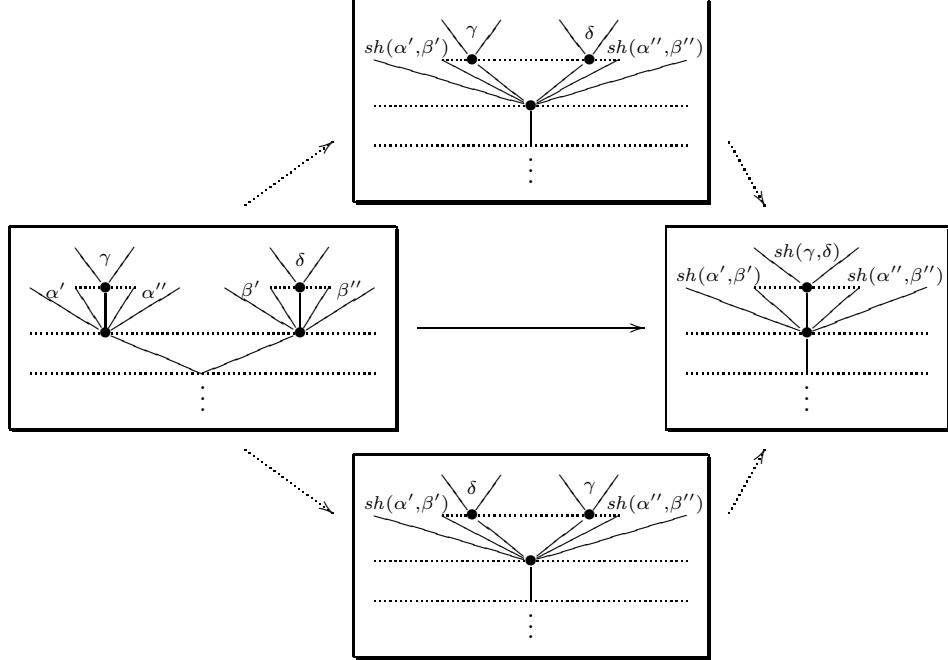


FIGURE 6.

Le complexe de Koszul à coefficients $K(S, \Omega_n^{epi}, T)$ est défini par les \mathbb{k} -modules

$$K(S, \Omega_n^{epi}, T) = \bigoplus_{\substack{u: \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma} \\ (\underline{\sigma}, \underline{\tau}) \in \text{Ob } \Omega_n^{epi} \times \text{Ob } \Omega_n^{epi}}} S(\underline{\sigma}) \otimes \{u\} \otimes T(\underline{\tau})$$

munis de la graduation telle que $\deg(x \otimes \{u\} \otimes y) = \deg(u) = \deg(\underline{\tau}) - \deg(\underline{\sigma})$, avec la différentielle donnée par la formule

$$\begin{aligned} \partial(x \otimes \{u\} \otimes y) = & \sum_{\substack{u=vw \\ \deg(v)=1}} \text{sgn}(v) \cdot v^*(x) \otimes \{w\} \otimes y \\ & + \sum_{\substack{u=vw \\ \deg(w)=1}} (-1)^{\deg(v)} \text{sgn}(w) \cdot x \otimes \{v\} \otimes w_*(y), \end{aligned}$$

pour tout $x \in S(\underline{\sigma})$, $y \in T(\underline{\tau})$, et tout morphisme $u: \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$.

L'application $\iota: K(\Omega_n^{epi}) \rightarrow B(\Omega_n^{epi})$ du §2.3 possède une extension naturelle aux constructions à coefficients $\kappa: K(S, \Omega_n^{epi}, T) \rightarrow B(S, \Omega_n^{epi}, T)$ qui est définie en posant

$$\kappa(x \otimes \{u\} \otimes y) = x \otimes \iota\{u\} \otimes y,$$

pour tout $x \otimes \{u\} \otimes y \in K(S, \Omega_n^{epi}, T)$. On constate que :

Proposition 3.2. — *Notre application commute aux différentielles et définit un morphisme naturel de dg-modules*

$$K(S, \Omega_n^{epi}, T) \xrightarrow{\kappa} B(S, \Omega_n^{epi}, T),$$

pour tout couple de diagrammes (S, T) .

Démonstration. — Comme on sait que $\partial\iota\{u\} = 0$, il suffit de vérifier que κ commute aux termes de la différentielle faisant intervenir l'action sur les coefficients, et une inspection de la définition de $\iota\{u\}$ permet d'établir cette propriété de façon immédiate. \square

On forme les complexes $\Gamma(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, -))$, $\Gamma = B, K$, associés à un diagramme de Yoneda $\Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, -)$, pour un diagramme contravariant quelconque S . On observe aisément que les produits de composition

$$\Omega_n^{epi}(\underline{\psi}, \underline{\phi}) \otimes \Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, -) \rightarrow \Omega_n^{epi}(\underline{\psi}, -)$$

induisent des morphismes

$$\Omega_n^{epi}(\underline{\psi}, \underline{\phi}) \otimes \Gamma(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, -)) \rightarrow \Gamma(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\psi}, -))$$

qui font de la collection $\Gamma(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, -))$, $\underline{\phi} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}$, un Ω_n^{epi} -diagramme contravariant $\Gamma(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$ naturellement associé à S .

On a aussi un morphisme d'augmentation

$$\epsilon : \Gamma(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \rightarrow S,$$

donné en degré 0 par les morphismes

$$S(\underline{\tau}) \otimes \Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, \underline{\tau}) \rightarrow S(\underline{\phi})$$

induits par l'action de Ω_n^{epi} sur S . On identifie S à un complexe concentré en degré 0 pour faire de l'augmentation un morphisme de complexes de Ω_n^{epi} -diagrammes.

On sait que la construction bar vérifie la propriété suivante :

Lemme 3.3. — *Le morphisme d'augmentation*

$$\epsilon : B(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \rightarrow S$$

définit une équivalence faible de Ω_n^{epi} -diagrammes contravariants pour tout S .

Démonstration. — Si on oublie la structure de diagramme, alors on a une section $\eta : S \rightarrow B(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$ au morphisme d'augmentation $\epsilon : B(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \rightarrow S$ donnée par le produit tensoriel de l'identité de $S(\underline{\tau})$ avec le morphisme identique $1_{\underline{\tau}} \in \Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, \underline{\tau})$. L'application

$$\nu(x \otimes \{\underline{\tau}_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_d} \underline{\tau}_d\} \otimes \{v\}) = x \otimes \{\underline{\tau}_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_d} \underline{\tau}_d \xleftarrow{v} \underline{\tau}\} \otimes \{1_{\underline{\tau}}\}$$

définit une homotopie contractante $\nu : B(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \rightarrow B(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$ telle que $\delta(\nu) = \text{id} - \eta\epsilon$, ce qui entraîne la conclusion du lemme. \square

On considère maintenant un diagramme ponctuel $b_{\underline{\sigma}}$ tel que :

$$b_{\underline{\sigma}}(\underline{\theta}) = \begin{cases} \mathbb{k}, & \text{si } \underline{\theta} = \underline{\sigma}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On utilisera dans la suite que $b_{\underline{\sigma}}$ possède une structure de diagramme covariant et contravariant sur Ω_n^{epi} .

On montre :

Lemme 3.4. — *Le complexe $K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, -))$ se réduit à sa composante de degré 0 lorsque $\underline{\phi} = \underline{\sigma}$ et est acyclique lorsque $\underline{\phi} \neq \underline{\sigma}$, de sorte que le morphisme d'augmentation*

$$\epsilon : K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \rightarrow b_{\underline{\sigma}}$$

définit une équivalence faible de Ω_n^{epi} -diagrammes contravariants, pour tout diagramme ponctuel $b_{\underline{\sigma}}$.

Démonstration. — On a une identification immédiate $K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\sigma}, -)) = b_{\underline{\sigma}}(\underline{\sigma})$ qui donne la première assertion du lemme. La démonstration de l'acyclicité du complexe $K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, -))$ pour $\underline{\phi} \neq \underline{\sigma}$, point clé de notre travail, est reportée au §5. \square

On a de plus :

Observation 3.5. — *Les complexes $\Gamma(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$, $\Gamma = B, K$, sont des complexes de Ω_n^{epi} -diagrammes projectifs.*

Le morphisme naturel de la Proposition §3.2, appliqué aux couples de diagrammes

$$(S, T) = (b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}(\underline{\phi}, -)),$$

définit un morphisme de complexes de Ω_n^{epi} -diagrammes contravariants

$$K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \xrightarrow{\kappa} B(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}).$$

Ce morphisme commute clairement aux augmentations ce qui entraîne que notre morphisme κ , s'inscrivant dans un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) & \xrightarrow[\sim]{\kappa} & B(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}), \\ & \searrow \sim \quad \swarrow \sim & \\ & b_{\underline{\sigma}} & \end{array}$$

définit lui-même une équivalence faible de complexes de Ω_n^{epi} -diagrammes.

3.6. Produit tensoriel de diagrammes. — On considère maintenant l'opération de produit tensoriel $S \otimes_{\Omega_n^{epi}} T$ sur la catégorie Ω_n^{epi} qui, pour tout couple (S, T) constitué d'un Ω_n^{epi} -diagramme contravariant S et d'un Ω_n^{epi} -diagramme covariant T , est définie par la cofin :

$$S \otimes_{\Omega_n^{epi}} T = \int^{\underline{\iota} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}} S(\underline{\iota}) \otimes T(\underline{\iota}).$$

Pour un couple de Ω_n^{epi} -diagrammes covariants (S, T) , on a aussi un dg-hom sur Ω_n^{epi} défini par la fin :

$$\text{Hom}_{\Omega_n^{epi}}(S, T) = \int_{\underline{\iota} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}} \text{Hom}_{dg\text{-Mod}}(S(\underline{\iota}), T(\underline{\iota})).$$

Le produit tensoriel de diagrammes sur une catégorie vérifie des propriétés analogues au produit tensoriel des modules sur une algèbre (voir [24, §17]). On a notamment un isomorphisme naturel $\Omega_n^{epi}(-, \underline{\iota}) \otimes_{\Omega_n^{epi}} T \simeq T(\underline{\iota})$ pour les foncteurs de Yoneda contravariants $S = \Omega_n^{epi}(-, \underline{\iota})$, et symétriquement $S \otimes_{\Omega_n^{epi}} \Omega_n^{epi}(\underline{\iota}, -) \simeq S(\underline{\iota})$ pour les foncteurs de Yoneda covariants $T = \Omega_n^{epi}(\underline{\iota}, -)$. On obtient à partir de ces relations :

Observation 3.7. — *On a un isomorphisme naturel*

$$\Gamma(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \otimes_{\Omega_n^{epi}} T \xrightarrow{\sim} \Gamma(S, \Omega_n^{epi}, T),$$

pour tout couple de Ω_n^{epi} -diagrammes (S, T) .

On applique ce résultat aux Ω_n^{epi} -diagrammes ponctuels $(S, T) = (b_{\underline{\sigma}}, b_{\underline{\iota}})$. Observons que :

Observation 3.8. — *On a des identités*

$$K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, b_{\underline{\iota}}) = K(\Omega_n^{epi})(\underline{\iota}, \underline{\sigma}) \quad \text{et} \quad B(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, b_{\underline{\iota}}) = B(\Omega_n^{epi})(\underline{\iota}, \underline{\sigma})$$

pour tout couple $(\underline{\iota}, \underline{\sigma}) \in \text{Ob } \Omega_n^{epi} \times \text{Ob } \Omega_n^{epi}$.

On obtient alors :

Théorème 3.9. — *Le morphisme $\iota : K(\Omega_n^{epi})(\underline{\iota}, \underline{\sigma}) \rightarrow B(\Omega_n^{epi})(\underline{\iota}, \underline{\sigma})$ défini dans la Proposition 2.4 est une équivalence faible de dg-modules, pour tout couple $(\underline{\iota}, \underline{\sigma}) \in \text{Ob } \Omega_n^{epi} \times \text{Ob } \Omega_n^{epi}$.*

Démonstration. — Le morphisme $\kappa : K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \rightarrow B(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$ induit par produit tensoriel $- \otimes_{\Omega_n^{epi}} b_{\underline{\iota}}$ une équivalence faible de dg-modules

$$\underbrace{K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \otimes_{\Omega_n^{epi}} b_{\underline{\iota}}}_{=K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, b_{\underline{\iota}})} \xrightarrow{\sim} \underbrace{B(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \otimes_{\Omega_n^{epi}} b_{\underline{\iota}}}_{=B(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, b_{\underline{\iota}})}$$

puisque $K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$ et $B(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$ sont des complexes de Ω_n^{epi} -diagrammes projectifs. Ceci entraîne, d'après l'observation précédente, la conclusion du théorème. \square

4. Complexes à coefficients et foncteurs Tor. — On s'intéresse maintenant aux applications des complexes à coefficients pour le calcul des foncteurs $\mathrm{Tor}_*^{\Omega_n^{epi}}(S, T)$ et $\mathrm{Ext}_{\Omega_n^{epi}}^*(S, T)$. On formalise nos résultats dans le cadre différentiel gradué en utilisant l'ensemble des idées exposées dans la section préliminaire (§§0.1-0.6). On commence par montrer comment les complexes à coefficients définis dans la section précédente s'étendent aux Ω_n^{epi} -diagrammes en dg-modules.

4.1. Produits tensoriels tordus et constructions à coefficients. — Nos complexes à coefficients

$$\Gamma(S, \Omega_n^{epi}, T), \quad \Gamma = B, K$$

s'identifient en fait à des dg-modules tordus de la forme

$$\Gamma(S, \Omega_n^{epi}, T) = \left\{ \bigoplus_{(\underline{\tau}, \underline{\sigma})} S(\underline{\sigma}) \otimes \Gamma(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) \otimes T(\underline{\tau}), \partial \right\}$$

pour un certain homomorphisme de torsion ∂ . On peut intégrer les termes de la différentielle de $B(S, \Omega_n^{epi}, T)$ qui ne font pas intervenir l'action de Ω_n^{epi} sur les coefficients (S, T) dans la différentielle interne de la construction $B(\Omega_n^{epi})$. L'homomorphisme de torsion de notre produit tensoriel se réduit donc aux termes

$$\begin{aligned} \partial(x \otimes \{\underline{\tau}_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_d} \underline{\tau}_d\} \otimes y) &= u_1^*(x) \otimes \{\underline{\tau}_1 \xleftarrow{u_2} \cdots \xleftarrow{u_d} \underline{\tau}_d\} \otimes y \\ &\quad + (-1)^d x \otimes \{\underline{\tau}_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_{d-1}} \underline{\tau}_{d-1}\} \otimes u_{d*}(y) \end{aligned}$$

dans le cas $\Gamma = B$, et reprend l'ensemble des termes de la formule du §3.1 dans le cas $\Gamma = K$.

Il suffit de former le produit tensoriel $S(\underline{\sigma}) \otimes \Gamma(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) \otimes T(\underline{\tau})$ dans la catégorie des dg-modules pour étendre la définition des complexes $\Gamma(S, \Omega_n^{epi}, T)$, $\Gamma = B, K$, aux Ω_n^{epi} -diagrammes en dg-modules. Les objets $S(\underline{\sigma})$ et $T(\underline{\tau})$ sont alors munis d'une différentielle interne qui est simplement ajoutée aux homomorphismes de torsion du §3.1.

On ne considère dans la suite que des diagrammes en dg-modules (S, T) dont les composantes $S(\underline{\sigma})$ et $T(\underline{\tau})$ sont des dg-modules cofibrants, pour tout $(\underline{\sigma}, \underline{\tau}) \in \mathrm{Ob} \Omega_n^{epi} \times \mathrm{Ob} \Omega_n^{epi}$. On dit alors que les diagrammes (S, T) sont dg-cofibrants.

Le morphisme $\kappa : K(S, \Omega_n^{epi}, T) \rightarrow B(S, \Omega_n^{epi}, T)$ considéré au §3 est simplement défini par des produits tensoriels $\mathrm{id}_{S(\underline{\sigma})} \otimes \iota \otimes \mathrm{id}_{T(\underline{\tau})}$ induits par le morphisme $\iota : K(\Omega_n^{epi}) \rightarrow B(\Omega_n^{epi})$ de la Proposition 2.4. On a le résultat suivant :

Lemme 4.2. — *Le morphisme de complexes à coefficients*

$$\kappa : K(S, \Omega_n^{epi}, T) \rightarrow B(S, \Omega_n^{epi}, T)$$

est une équivalence faible de dg-modules dès lors que (S, T) sont des Ω_n^{epi} -diagrammes en dg-modules dg-cofibrants. \square

Démonstration. — La filtration par le degré sur chaque dg-graphe $\Gamma(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$, pour $\Gamma = B, K$, induit une filtration naturelle au niveau des produits tensoriels $\Gamma(S, \Omega_n^{epi}, T) = \{\bigoplus_{(\underline{\tau}, \underline{\sigma})} S(\underline{\sigma}) \otimes \Gamma(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) \otimes T(\underline{\tau}), \partial\}$. On en déduit l'existence d'une suite spectrale $E^r(\Gamma(S, \Omega_n^{epi}, T)) \Rightarrow H_*(\Gamma(S, \Omega_n^{epi}, T))$ telle que d^0 est déterminé

par les différentielles internes des objets S , T et $\Gamma(\Omega_n^{epi})$. Le morphisme κ préserve cette filtration et induit un morphisme de suites spectrales $\kappa : E^r(K(S, \Omega_n^{epi}, T)) \rightarrow E^r(B(S, \Omega_n^{epi}, T))$ qui est un isomorphisme au rang E^1 . La conclusion s'ensuit. \square

La catégorie des Ω_n^{epi} -diagrammes contravariants en dg-modules, et la catégorie des Ω_n^{epi} -diagrammes covariants de même, hérite d'une structure de catégorie modèle projective naturelle (voir [12, §11.6]). Les foncteurs $\text{Tor}_*^{\Omega_n^{epi}}(S, T)$ ont une définition naturelle dans le cadre des dg-diagrammes comme l'homologie de produits tensoriels $Q_S \otimes_{\Omega_n^{epi}} T$ appliqués à un remplacement cofibrant $0 \rightarrow Q_S \xrightarrow{\sim} S$ dans la catégorie des Ω_n^{epi} -diagrammes en dg-modules. On a une définition équivalente faisant intervenir un remplacement cofibrant de T . Les foncteurs $\text{Ext}_{\Omega_n^{epi}}^*(S, T)$ sont définis de façon analogues comme l'homologie de dg-hom $\text{Hom}_{\Omega_n^{epi}}(Q_S, T)$ sur un remplacement cofibrant de S .

Les observations des §§3.2-3.3 et §3.7 se généralisent aux diagrammes dg-cofibrants. On montre aussi que le complexe bar $B(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi})$ est cofibrant comme Ω_n^{epi} -diagramme dès lors que S est dg-cofibrant et définit donc en remplacement cofibrant particulier de S dans la catégorie des Ω_n^{epi} -diagrammes. On en déduit que l'homologie de $B(S, \Omega_n^{epi}, T) = B(S, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}) \otimes_{\Omega_n^{epi}} T$ détermine le foncteur Tor différentiel gradué $\text{Tor}_*^{\Omega_n^{epi}}(S, T)$. Le Lemme 4.2 entraîne donc :

Théorème 4.A. — *On a l'identité*

$$\text{Tor}_*^{\Omega_n^{epi}}(S, T) = H_*(K(S, \Omega_n^{epi}, T)),$$

dès lors que (S, T) sont des Ω_n^{epi} -diagrammes en dg-modules dg-cofibrants. \square

On obtient de même :

Théorème 4.B. — *On a l'identité*

$$\text{Ext}_{\Omega_n^{epi}}^*(S, T) = H_*(\text{Hom}_{\Omega_n^{epi}}(K(\Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}, S), T),$$

dès lors que (S, T) sont des Ω_n^{epi} -diagrammes en dg-modules dg-cofibrants. \square

4.3. Relations avec le résultat principal de [19]. — Notons \underline{i}_n l'objet de Ω_n^{epi} représenté par l'arbre-tronc



On considère après [19] le Ω_n^{epi} -diagramme ponctuel $b_n = b_{\underline{i}_n}$ qui vaut par définition :

$$b_n(\underline{\sigma}) = \begin{cases} \mathbb{k}, & \text{si } \underline{\sigma} = \underline{i}_n \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'arbre tronc \underline{i}_n définit en fait l'objet final de Ω_n^{epi} . Par suite, on obtient que le complexe de Koszul à coefficient dans b_n possède un développement de la forme :

$$K(b_n, \Omega_n^{epi}, T) = \left\{ \bigoplus_{\underline{\tau}} T(\underline{\tau}), \partial \right\}.$$

Le complexe de Koszul $K(b_n, \Omega_n^{epi}, T)$ s'identifie en fait au complexe $C_*(T)$ défini dans [19, §§3.5-9]. Le Théorème 4.A donne donc une généralisation de l'identité

$$\mathrm{Tor}_*^{\Omega_n^{epi}}(b_n, T) = H_*(C_*(T))$$

démontrée par les auteurs de [19].

5. Appendice : la propriété d'acyclicité du complexe de Koszul. — Le but de cette section est d'établir la propriété suivante dont on avait reporté la démonstration au §3 :

Lemme 5.A (affirmation du Lemme 3.4). — *L'homologie du dg-module*

$$L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) = K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, -))$$

associé au diagramme ponctuel $b_{\underline{\sigma}}$ et au diagramme de Yoneda $\Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, -)$ est triviale lorsque $\underline{\tau} \neq \underline{\sigma}$.

Ce lemme généralise le résultat obtenu dans [19] pour le diagramme ponctuel $b_{\underline{i}_n}$ associé à un arbre tronc \underline{i}_n . On suit le même plan de démonstration. On devra cependant introduire des notions ad hoc pour travailler avec diagrammes ponctuels $b_{\underline{\tau}}$ associés à des arbres quelconques $\underline{\tau}$ et des morphismes $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$ susceptibles d'entremêler les composantes de $\underline{\tau}$ de façon compliquée.

On commence par reprendre les définitions pour analyser la structure du dg-module $L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$.

5.1. La définition du complexe $L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$. — Le dg-module

$$L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) = K(b_{\underline{\sigma}}, \Omega_n^{epi}, \Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, -))$$

est engendré en degré d par les tenseurs $\{v\} \otimes \{w\}$ associés aux couples de morphismes composable $\underline{\sigma} \xleftarrow{v} \underline{\theta} \xleftarrow{w} \underline{\tau}$ tels que $\deg(v) = d$, avec la différentielle

$$\partial(\{v\} \otimes \{w\}) = \sum_{\substack{v=ab \\ \deg b=1}} \pm \{a\} \otimes \{bw\}.$$

La somme s'étend sur l'ensemble des décompositions $v = ab$ telles que $\deg b = 1$. Le facteur $\{w\}$ représente, dans la définition du §2.3, un élément du diagramme de Yoneda $\Omega_n^{epi}(\underline{\tau}, -)$.

On suppose dans la suite de cette étude que les éléments de $In \underline{\tau}$ sont en bijection avec un ensemble source \underline{e} muni d'un degré interne qui s'ajoute à la graduation du complexe $L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$ telle qu'on l'a définie. On applique aussi la généralisation, mentionnée au §2.2, de la définition du signe $\mathrm{sgn}(b)$ associé à un morphisme de degré 1 dans la formule de la différentielle de $L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$.

Le complexe $L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$ possède un scindage naturel

$$L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) = \bigoplus_{u: \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}} L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$$

pour des sous-complexes $L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$, $u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$, engendrés par les tenseurs $\{v\} \otimes \{w\}$ tels que $vw = u$.

5.2. Une suite spectrale. — L'idée consiste à munir $L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$ de la filtration

$$0 = F_0 L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \subset \cdots \subset F_d L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u \subset \cdots \subset \text{colim}_d F_d L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u = L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$$

dont le terme $F_d L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$ est constitué des facteurs $\mathbb{k}\{v\} \otimes \mathbb{k}\{w\}$ associés à un objet milieu $\theta = \{\underline{d}_0 \xrightarrow{\theta_1} \cdots \xleftarrow{\theta_n} \underline{d}_n\}$ tel que $d_1 + \cdots + d_{n-1} \leq d$.

La différentielle d^0 de la suite spectrale définie par cette filtration se réduit aux termes

$$d^0(\{v\} \otimes \{w\}) = \sum_{v=ab_0} \pm\{a\} \otimes \{b_0 w\}$$

associés aux décompositions $v = ab_0$ telles que, dans la représentation graphique des objets de Ω_n^{epi} , le morphisme $b_0 : \underline{\theta} \rightarrow \underline{\rho}$ fixe le nombre de sommets de niveau $i > 0$. Dans la description du §2.1, ces morphismes b_0 sont donnés par la fusion de deux sommets consécutifs de niveau 0, représentée schématiquement dans la Figure 7. L'étiquetage des feuilles nous permet, d'après les observations du §1.2, de représenter l'application induite par b_0 sur les ensembles sources des arbres.

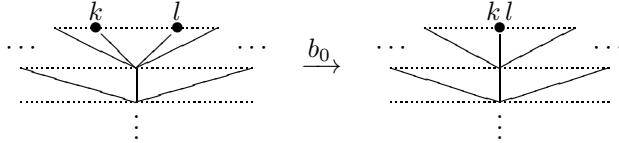


FIGURE 7.

On considère, comme dans [19, Proposition 4.7], le foncteur de troncature $tr : \Omega_n^{epi} \rightarrow \Omega_{n-1}^{epi}$ défini sur les objets par l'opération

$$tr\{\underline{t}_0 \xrightarrow{\tau_1} \underline{t}_1 \xrightarrow{\tau_2} \cdots \xrightarrow{\tau_n} \underline{t}_n\} = \{\underline{t}_1 \xrightarrow{\tau_2} \cdots \xrightarrow{\tau_n} \underline{t}_n\}.$$

On dit qu'un tenseur $\{\hat{v}\} \otimes \{\hat{w}\}$ couvre une décomposition tronquée $tr u = vw$ si on a $tr \hat{v} = v$ et $tr \hat{w} = w$.

La différentielle d^0 préservant la structure aux niveaux > 0 , on obtient :

Observation 5.3. — *Le module $L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_{tr u=vw}$ engendré par les tenseurs $\{\hat{v}\} \otimes \{\hat{w}\}$ tels que $u = \hat{v} \hat{w}$ couvre une décomposition tronquée donnée $tr u = vw$ définit un sous-complexe de $E^0 L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$, de sorte que $E^0 L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$ admet un scindage :*

$$E^0 L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u = \bigoplus_{tr u=vw} (L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_{tr u=vw}, d^0).$$

On analyse la définition des décompositions $u = \hat{v} \hat{w}$ dans le prochain paragraphe en vue d'obtenir une identification des complexes $(L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_{tr u=vw}, d^0)$.

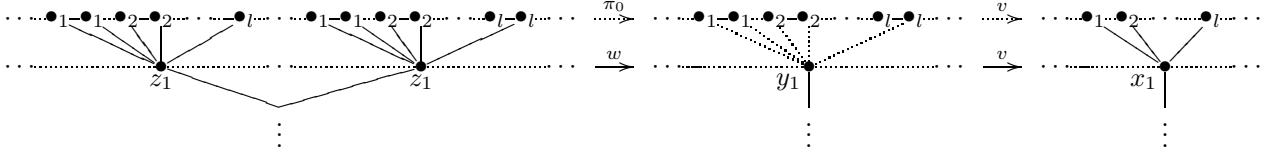
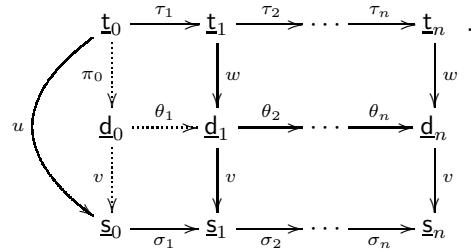


FIGURE 8. Une construction de factorisation $u = v\pi_0$ donnant un recouvrement $u = \hat{v}\hat{w}$ de décomposition tronquée $tr u = vw$. Les expressions $\bullet_k - \bullet_l$ représentent les intervalles de sommets fusionnés sur les différents éléments $\bullet_k = x_0 \in \underline{s}_0$ par l'application $u : \underline{t}_0 \rightarrow \underline{s}_0$.

5.4. *Troncature et recouvrement.* — On se donne un morphisme

$$\{\underline{t}_0 \xrightarrow{\tau_1} \cdots \xrightarrow{\tau_n} \underline{t}_n\} \xrightarrow{u} \{\sigma_0 \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_n} \underline{s}_n\}$$

et une décomposition $tr u = vw$ de $tr u$ dans la catégorie Ω_{n-1}^{epi} . Cette décomposition est définie par le squelette solide d'un diagramme de la forme :



On considère l'ensemble des applications pointillées qui peuvent compléter un tel diagramme définissant alors une décomposition $u = \hat{v}\hat{w}$ du morphisme u dans Ω_n^{epi} . L'application $\pi_0 : \underline{t}_0 \rightarrow \underline{d}_0$ suffit à déterminer toutes les autres puisque les applications du diagramme sont supposées surjectives par définition de Ω_n^{epi} .

On pourra s'aider de la Figure 8 pour suivre la construction de la factorisation $u = v\pi_0$.

L'application $w\tau_1$ envoie les fibres $\tau_1^{-1}(z_1) \subset \underline{t}_0$ des sommets $z_1 \in w^{-1}(y_1)$ sur y_1 , pour chaque $y_1 \in \underline{d}_1$. La factorisation $w\tau_1 = \theta_1\pi_0$ revient à la donnée d'une concaténation d'ensembles ordonnés $\underline{d}_0 = \coprod_{y_1 \in \underline{d}_1} \underline{d}_0(y_1)$, qui représentent les fibres $\underline{d}_0(y_1) = \theta_1^{-1}(y_1)$ de l'application θ_1 , et d'applications surjectives

$$(*) \quad \pi_0 : \coprod_{z_1 \in w^{-1}(y_1)} \tau_1^{-1}(z_1) \rightarrow \underline{d}_0(y_1)$$

qui représentent la restriction de π_0 à chaque groupe de composantes associé à un élément $y_1 \in \underline{d}_1$. Ces applications doivent aussi préserver l'ordre sur chaque fibre $\tau_1^{-1}(z_1)$ par définition de la catégorie Ω_n^{epi} . Dans la Figure 8, on a représenté la fibre $\underline{d}_0(y_1) = \theta_1^{-1}(y_1)$ d'un seul point $y_1 \in \underline{d}_1$ et les fibres $\tau_1^{-1}(z_1)$ des sommets $z_1 \in \underline{t}_1$ qui sont envoyés sur ce point y_1 .

L'existence d'une factorisation $u = v\pi_0$ impose la relation supplémentaire $u(k) \leq u(l) \Rightarrow \pi_0(k) \leq \pi_0(l)$ pour chaque paire $\{k, l\}$ sur un même groupe de composantes

$\coprod_{z_1 \in w^{-1}(y_1)} \tau_1^{-1}(z_1)$ car les applications v doivent également être croissantes sur les fibres. On a aussi $u(k) \neq u(l) \Rightarrow \pi_0(k) \neq \pi_0(l)$. On note que $u^{-1}(x_0) \cap \tau_1^{-1}(z_1)$ définit un sous-intervalle de $\tau_1^{-1}(z_1) \subset \underline{t}_0$, pour tout $x_0 \in \underline{s}_0$, puisque l'application u est aussi supposée croissante sur chaque fibre $\tau_1^{-1}(z_1)$, $z_1 \in \underline{t}_1$. Dans la Figure 8, on a représenté l'image inverse des éléments $\bullet_k = x_0 \in \sigma_1^{-1}(x_1)$ dans la fibre du sommet y_1 et des sommets z_1 par des intervalles $\bullet_k - \bullet_k$ qui, d'après les observations de ce paragraphe, se doivent d'être agencés selon l'ordre de l'ensemble image $\{\bullet_1, \dots, \bullet_l\} = \sigma_1^{-1}(x_1) \subset \underline{s}_0$. L'application π_0 est donc constituée d'un assemblage de surjections

$$\bullet_k - \bullet_k \amalg \dots \amalg \bullet_k - \bullet_k \xrightarrow{\pi_0} \bullet_k - \bullet_k$$

préservant l'ordre sur chaque intervalle $\bullet_k - \bullet_k$ du domaine.

In fine, on conclut de notre analyse que l'application $\pi_0 : \underline{t}_0 \rightarrow \underline{d}_0$ s'insérant dans une factorisation $u = \hat{v} \hat{w}$ est entièrement déterminée par la donnée d'ensembles ordonnés $\underline{d}_0(x_0, y_1)$, $x_0 \in \underline{s}_0$, $y_1 \in \underline{t}_1$, qui représenteront les images inverses $v^{-1}(x_0) \cap \theta_1^{-1}(y_1)$ dans les fibres des sommets $y_1 \in \underline{t}_1$, et d'applications surjectives

$$(**) \quad \pi_0 : \coprod_{z_1 \in w^{-1}(y_1)} u^{-1}(x_0) \cap \tau_1^{-1}(z_1) \rightarrow \underline{d}_0(x_0, y_1)$$

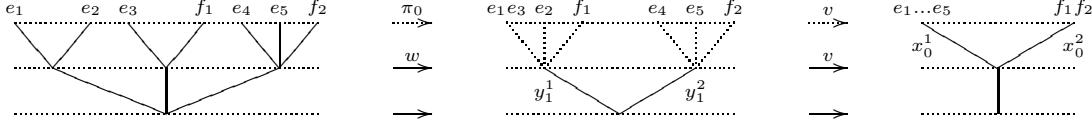
préservant l'ordre sur chaque composante $u^{-1}(x_0) \cap \tau_1^{-1}(z_1)$. L'ensemble ordonné \underline{d}_0 est alors défini par la concaténation $\underline{d}_0 = \coprod_{y_1=1}^{d_1} \{\coprod_{x_0=1}^{s_0} \underline{d}_0(x_0, y_1)\}$ dans l'ordre indiqué par la somme. L'application $\pi_0 : \underline{t}_0 \rightarrow \underline{d}_0$ est formée de la somme des surjections que l'on s'est données (**), avec une permutation de battage provenant de l'ordonnancement de la somme dans la définition de \underline{d}_0 . L'application $v : \underline{d}_0 \rightarrow \underline{s}_0$ est déterminée par l'identité $v^{-1}(x_0) = \coprod_{y_1 \in \underline{d}_1} \underline{d}_0(x_0, y_1)$, pour chaque $x_0 \in \underline{s}_0$, et l'application $\theta_1 : \underline{d}_0 \rightarrow \underline{d}_1$ par l'identité $\theta_1^{-1}(y_1) = \coprod_{x_0 \in \underline{s}_0} \underline{d}_0(x_0, y_1)$, pour chaque $y_1 \in \underline{d}_1$. Dans la Figure 8, le domaine $\underline{d}_0(x_0, y_1)$ associé au point $\bullet_k = x_0$ est représenté par l'intervalle $\bullet_k - \bullet_k$ au dessus de y_1 , les intervalles $\bullet_k - \bullet_k$ au dessus des différents z_1 représentant les images inverses $u^{-1}(x_0) \cap \tau_1^{-1}(z_1)$ dans les fibres des différents sommets $z_1 \in \underline{t}_1$.

On a supposé au départ que le domaine $\underline{t}_0 = \text{In } \underline{\mathcal{L}}$ est en bijection avec un ensemble d'entrées donné $\underline{\mathbf{e}}$. On va identifier chaque $e \in \underline{\mathbf{e}}$ au point correspondant de \underline{t}_0 pour simplifier l'écriture des relations qui vont suivre. On forme, pour chaque couple $(x_0, y_1) \in \underline{s}_0 \times \underline{d}_1$, le produit tensoriel d'algèbres associatives libres

$$A_{x_0 y_1} = \bigotimes_{z_1 \in w^{-1}(y_1)} \mathbb{k}\langle X_e, e \in u^{-1}(x_0) \cap \tau_1^{-1}(z_1) \rangle$$

sur des variables X_e de degré $\deg(e)$, pour chaque $e \in \underline{\mathbf{e}}$. On considère la construction bar $B(A_{x_0 y_1})$ de chacune de ces algèbres graduées. Pour la décomposition tronquée $tr u = vw$ de la Figure 9, on obtient ainsi les algèbres

$$A_{x_0^1 y_1^1} = \mathbb{k}\langle X_{e_1}, X_{e_2} \rangle \otimes \mathbb{k}\langle X_{e_3} \rangle, \quad A_{x_0^2 y_1^1} = \mathbb{k}\langle X_{f_1} \rangle, \\ \text{et} \quad A_{x_0^1 y_1^2} = \mathbb{k}\langle X_{e_4}, X_{e_5} \rangle, \quad A_{x_0^2 y_1^2} = \mathbb{k}\langle X_{f_2} \rangle.$$

FIGURE 9. Un exemple de décomposition $u = vw$.

On n'utilisera pas le produit tensoriel, que l'on réserve pour la notation du complexe bar $B(A_{x_0y_1})$, mais un simple \cdot dans l'expression des éléments de $A_{x_0y_1}$. On peut en fait identifier $A_{x_0y_1}$ à l'algèbre engendrée par les variables X_e , $e \in u^{-1}(x_0) \cap \tau_1^{-1}(z_1)$, $z_1 \in w^{-1}(y_1)$, avec les relations de commutations $X_{e_1} \cdot X_{e_2} = X_{e_2} \cdot X_{e_1}$, lorsque les variables X_{e_1} et X_{e_2} appartiennent à des groupements $u^{-1}(x_0) \cap \tau_1^{-1}(z_1)$ différents.

Le complexe $B(A_{x_0y_1})$ possède un facteur direct $B(A_{x_0y_1})^{sh}$ qui est engendré par les tenseurs $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_d \in A_{x_0y_1}^{\otimes d}$ tels que :

- le monôme $\alpha = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_d$ obtenu par concaténation des facteurs α_i est de degré 1 en chaque variable X_e , pour tout $e \in u^{-1}(x_0) \cap \tau_1^{-1}(z_1)$, $z_1 \in w^{-1}(y_1)$,
- les variables X_e associées aux indices $e \in u^{-1}(x_0) \cap \tau_1^{-1}(z_1)$, pour un élément $z_1 \in w^{-1}(y_1)$ fixé, apparaissent dans l'ordre des indices $u^{-1}(x_0) \cap \tau_1^{-1}(z_1) \subset \underline{t}_0$ dans le monôme α .

Dans notre exemple, on obtient pour $B(A_{x_0y_1})^{sh}$ un complexe de la forme :

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\mathbb{k} X_{e_1} \otimes X_{e_2} \otimes X_{e_3} \oplus \mathbb{k} X_{e_1} \otimes X_{e_3} \otimes X_{e_2} \oplus \mathbb{k} X_{e_3} \otimes X_{e_1} \otimes X_{e_2}}_{\deg=3} \\
 \xrightarrow{\partial} & \underbrace{\mathbb{k} X_{e_1} X_{e_2} \otimes X_{e_3} \oplus \mathbb{k} X_{e_1} X_{e_3} \otimes X_{e_2} \oplus \mathbb{k} X_{e_3} X_{e_1} \otimes X_{e_2}}_{\deg=2} \\
 & \oplus \underbrace{\mathbb{k} X_{e_1} \otimes X_{e_2} X_{e_3} \oplus \mathbb{k} X_{e_1} \otimes X_{e_3} X_{e_2} \oplus \mathbb{k} X_{e_3} \otimes X_{e_1} X_{e_2}}_{\deg=2} \\
 \xrightarrow{\partial} & \underbrace{\mathbb{k} X_{e_1} X_{e_2} X_{e_3} \oplus \mathbb{k} X_{e_1} X_{e_3} X_{e_2} \oplus \mathbb{k} X_{e_3} X_{e_1} X_{e_2}}_{\deg=1}.
 \end{aligned}$$

On observe :

Observation 5.5. — La donnée de la surjection $(**)$ au §5.4, pour un couple (x_0, y_1) fixé, revient à la donnée d'un tenseur $\pm \otimes_{k \in \underline{t}_0(x_0, y_1)} \alpha_k$ de $B(A_{x_0y_1})^{sh}$, les monômes $\alpha_k \in A_{x_0y_1}$, $k \in \underline{t}_0(x_0, y_1)$, associés à une surjection π_0 étant déterminés par les indices des images inverses $\pi_0^{-1}(k) \subset \underline{e}$.

Cette correspondance fait implicitement appel à une permutation d'éléments gradués, associés aux entrées $e \in \underline{e}$. Le signe qui apparaît dans l'expression de notre tenseur est produit par cette permutation.

Par exemple, pour la surjection π_0 de la Figure 9, on obtient les tenseurs

$$\begin{aligned}
 X_{e_1} X_{e_3} \otimes X_{e_2} & \in B(A_{x_0^1 y_1^1})^{sh}, \quad X_{f_1} \in B(A_{x_0^2 y_1^1})^{sh}, \\
 \text{et} \quad X_{e_4} \otimes X_{e_5} & \in B(A_{x_0^1 y_1^2})^{sh}, \quad X_{f_2} \in B(A_{x_0^2 y_1^2})^{sh}.
 \end{aligned}$$

L'article [19] utilise une représentation différente, en termes de posets, des surjections (**) du §5.4. L'interprétation en termes de tenseurs dans le complexe bar nous permet de gérer les signes qui interviennent dans les différentielles de façon automatique.

On a maintenant :

Observation 5.6. — La différentielle $d^0(\{\hat{v}\} \otimes \{\hat{w}\}) = \sum_{\hat{v}=ab_0} \text{sgn}(b_0) \cdot \{a\} \otimes \{b_0\hat{w}\}$ du complexe $(L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_{tr u=vw}, d^0)$ s'identifie à la différentielle du produit tensoriel des complexes $B(A_{x_0y_1})^{sh}$, de sorte que l'on a une identité :

$$(L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_{tr u=vw}, d^0) = \bigotimes_{(x_0, y_1) \in \underline{\mathbf{s}_0} \times \underline{\mathbf{d}_1}} B(A_{x_0y_1})^{sh}.$$

On sait que la construction bar (réduite) d'une algèbre associative libre $A = \mathbb{k}\langle Y_f, f \in \mathbf{f} \rangle$ vérifie

$$H_*(\overline{B}(A)) = \bigoplus_{f \in \mathbf{f}} \mathbb{k}\{Y_f\},$$

pour des classes $\{Y_f\}$ placées en degré $\deg(f) + 1$ (voir par exemple [20, §3.1]). On en déduit, en appliquant la formule de Künneth (voir [21, §X.7])

$$H_*(B(A_{x_0y_1})) = \bigotimes_{z_1 \in w^{-1}(y_1)} H_*(B(\mathbb{k}\langle X_e, e \in u^{-1}(x_0) \cap \tau_0^{-1}(z_1) \rangle))$$

que le complexe $B(A_{x_0y_1})^{sh}$ est acyclique, sauf lorsque $u^{-1}(x_0) \cap \tau_0^{-1}(z_1)$ est réduit à un seul élément pour tout z_1 , auquel cas on obtient $H_*(B(A_{x_0y_1})) = \mathbb{k}$.

Dans le prochain paragraphe, on introduit une nouvelle notion - la notion de morphisme injectif fibre à fibre au niveau 0 - pour appliquer ce résultat au complexe $(L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_{tr u=vw}, d^0)$.

5.7. Une construction de cycles au niveau E^0 de la suite spectrale. — On dit qu'un morphisme $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$ est injectif fibre à fibre au niveau 0 si l'application

$$\tau_1^{-1}(z_1) \xrightarrow{u|_{\tau_1^{-1}(z_1)}} \sigma_1^{-1}(u(z_1))$$

induite par $u : \underline{\mathbf{t}_0} \rightarrow \underline{\mathbf{s}_0}$ est injective pour tout $z_1 \in \underline{\mathbf{t}_1}$. La Figure 10 donne un exemple de tel morphisme. Rappelons que l'étiquetage des feuilles permet, d'après les observations du §1.2, de déterminer complètement le morphisme u par sa représentation graphique (en utilisant les étiquettes comme des variables muettes). La condition d'injectivité de ce paragraphe revient à assurer que $u^{-1}(x_0) \cap \tau_0^{-1}(z_1)$ est réduit à un seul élément pour tout $z_1 \in \underline{\mathbf{t}_1}$. On a donc, d'après les remarques suivant l'Observation 5.6 :

Lemme 5.8. — Pour toute décomposition tronquée $tr u = vw$, on a la relation $H_*(E^0 L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_{tr u=vw}, d^0) = \mathbb{k}$ lorsque le morphisme u est injectif fibre à fibre au niveau 0 et $H_*(E^0 L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_{tr u=vw}, d^0) = 0$ sinon. \square

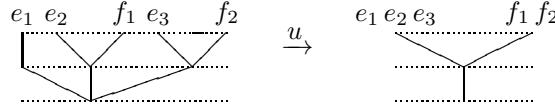


FIGURE 10.

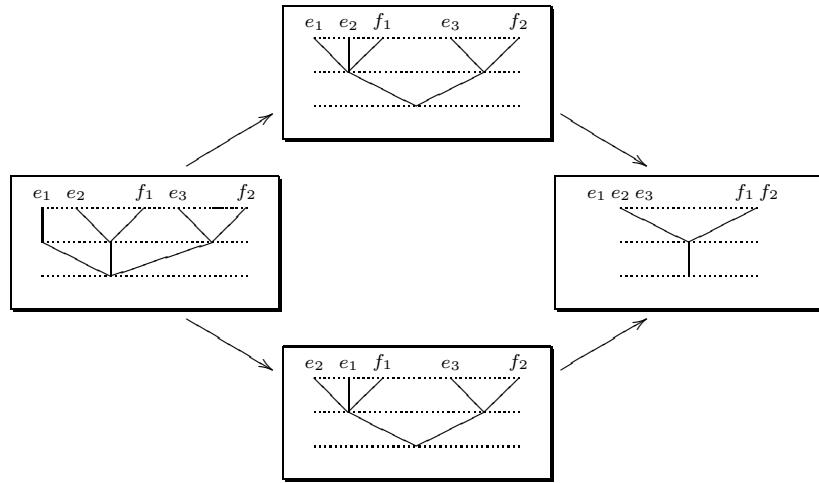


FIGURE 11.

On applique la définition de l'isomorphisme de Künneth (voir [21, §X.7] ou [20, §4.2]) pour obtenir des représentants des classes de

$$E^1 L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u = H_*(E^0 L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u, d^0).$$

On considère simplement l'ensemble des décompositions $u = \hat{v} \hat{w}$ du §5.4 telles que $\underline{d}_1 = \underline{t}_0$ et l'application π_0 est bijective, pour chaque décomposition donnée $\text{tr } u = vw$ dans $\Omega_{n-1}^{\text{epi}}$. La Figure 11 donne un l'ensemble de ces décompositions $u = \hat{v} \hat{w}$ pour une décomposition tronquée donnée $\text{tr } u = vw$ du morphisme de la Figure 10.

On obtient alors :

Lemme 5.9. — *Lorsque le morphisme u est injectif fibre à fibre au niveau 0, la somme $\mathcal{Z}(\{v\} \otimes \{w\}) = \sum_{u=\hat{v} \hat{w}} \pm \{\hat{v}\} \otimes \{\hat{w}\}$ sur l'ensemble des décompositions couvrant $\text{tr } u = vw$ telles que $\underline{d}_1 = \underline{t}_0$ et π_0 est bijective définit un cycle dans $L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$. L'application $\mathcal{Z} : \{v\} \otimes \{w\} \mapsto \mathcal{Z}(\{v\} \otimes \{w\})$ définit alors un isomorphisme de modules gradués :*

$$\bigoplus_{\text{tr } u = vw} \mathbb{k}\{v\} \otimes \{w\} \xrightarrow{\cong} H_*(E^0 L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u, d^0) = E^1 L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u. \quad \square$$

Le signe \pm dans la définition de $\mathcal{Z}(\{v\} \otimes \{w\})$ est déterminé par la permutation de battage π_0 qui intervient dans la construction de \hat{w} .

La donnée d'un représentant explicite des classes des modules d'homologies $E^1 = H_*(E^0 L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u, d^0)$ permet d'identifier la différentielle d^1 de la suite spectrale. En fait, on obtient aisément :

Lemme 5.10. — *On a la relation*

$$d^1 \mathcal{Z}(\{v\} \otimes \{w\}) = \sum_{\substack{v=ab \\ \deg b=1}} \pm \mathcal{Z}(\{a\} \otimes \{bw\})$$

de sorte que l'application $\mathcal{Z} : \{v\} \otimes \{w\} \mapsto \mathcal{Z}(\{v\} \otimes \{w\})$ induit un isomorphisme de dg-modules

$$L_{n-1}(tr \underline{\sigma}, tr \underline{\tau})_{tr u} \xrightarrow{\sim} (E^1 L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u, d^1)$$

lorsque le morphisme u est injectif fibre à fibre au niveau 0. \square

Les entrées de $tr \underline{\tau} = \{\underline{t}_1 \xrightarrow{\tau_2} \dots \xrightarrow{\tau_n} \underline{t}_n\}$ sont en bijection avec l'ensemble des fibres $\underline{e}' = \{\tau_0^{-1}(z_1), z_1 \in \underline{t}_1\}$ de la première surjection de $\underline{\tau} = \{\underline{t}_0 \xrightarrow{\tau_1} \dots \xrightarrow{\tau_n} \underline{t}_n\}$. Pour que les signes de $L_{n-1}(tr \underline{\sigma}, tr \underline{\tau})_{tr u}$ correspondent aux signes de la différentielle d^1 , on associe à ces entrées $e' = \tau_0^{-1}(z_1)$ le degré

$$\deg(e') = \#\tau_0^{-1}(z_1) + \sum_{k \in \tau_0^{-1}(z_1)} \deg(k).$$

Dans cette expression, le nombre $\#\tau_0^{-1}(z_1)$, qui désigne le cardinal de l'ensemble $\tau_0^{-1}(z_1)$, correspond, dans la représentation de §2.2, au nombre de suspensions associées aux sommets de $\tau_0^{-1}(z_1)$.

En récapitulant les résultats obtenus, on obtient :

Lemme 5.11. — *On a $E^1 L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u = L_{n-1}(tr \underline{\sigma}, tr \underline{\tau})_{tr u}$ si le morphisme u est injectif fibre à fibre au niveau 0 et $E^1 L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u = 0$ sinon.* \square

Une récurrence immédiate entraîne donc que l'homologie du complexe $L_n(\underline{\tau}, \underline{\sigma})_u$ est triviale, sauf lorsque le morphisme u est injectif fibre à fibre à tout niveau, ce qui suppose $u = \text{id}$ et $\underline{\tau} = \underline{\sigma}$. La conclusion du Lemme 5.A s'ensuit et ceci boucle la démonstration des résultats de §§3-4. \square

Partie 2. La résolution de Koszul des la catégorie des arbres élagués

On utilise le résultat du Théorème 3.9 pour définir un modèle minimal de Ω_n^{epi} dans le cadre différentiel gradué. On révise les applications de constructions de l'algèbre différentielle graduée aux catégories au §6 avant de définir ce modèle minimal au §7.

6. Intermède : constructions sur les catégories enrichies en dg-modules.

— On considère pour nos constructions une catégorie *dg Cat* _{\mathcal{X}} formée des petites catégories enrichies en dg-modules (on parlera de dg-catégories) avec un ensemble d'objets fixé \mathcal{X} (dans les applications de cet article, on prendra $\mathcal{X} = \text{Ob } \Omega_n^{epi}$, l'ensemble des arbres élagués à niveaux). Les morphismes de *dg Cat* _{\mathcal{X}} sont les foncteurs de dg-catégories qui sont l'identité sur l'ensemble des objets.

Le but de cette section est de passer en revue les applications des constructions bar et cobar de l’algèbre différentielle graduée aux catégories de $dg\ Cat_{\mathcal{X}}$. On passe rapidement sur les démonstrations qui, pour la plupart, sont des généralisations formelles des arguments développés dans le cadre des algèbres. On renvoie le lecteur à l’article [14] pour un exposé détaillé de ces arguments. On s’en rapportera également à la thèse [18] (voir plus particulièrement le chapitre 5 de cette thèse) pour une présentation du cadre catégorique permettant la généralisation des constructions de [14]. Citons également l’article [16] pour un survol des applications des dg-catégories et une ample bibliographie sur le sujet.

On commence par expliciter la structure interne des catégories et des foncteurs de $dg\ Cat_{\mathcal{X}}$.

6.1. La structure des dg-catégories avec ensemble d’objets fixé. — La structure des dg-catégories $\Theta \in dg\ Cat_{\mathcal{X}}$ est entièrement déterminée par la donnée de dg-hom $\Theta(\underline{b}, \underline{a}) \in dg\ Mod$, associés aux couples $(\underline{a}, \underline{b}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, avec des morphismes de composition

$$\Theta(\underline{x}, \underline{a}) \otimes \Theta(\underline{b}, \underline{x}) \xrightarrow{\mu} \Theta(\underline{b}, \underline{a})$$

et des morphismes d’identité

$$\mathbb{k} \xrightarrow{\eta} \Theta(\underline{x}, \underline{x})$$

vérifiant une généralisation naturelle des axiomes d’associativité et d’unité de la composition des morphismes dans les catégories. La donnée des morphismes d’identité équivaut à la donnée d’éléments unités $1_{\underline{x}} \in \Theta(\underline{x}, \underline{x})$ tels que $\delta(1_{\underline{x}}) = 0$ pour tout $\underline{x} \in \mathcal{X}$. On utilisera également les notations multiplicatives usuelles $\alpha \cdot \beta$ pour le produit de composition d’une dg-catégorie.

Un morphisme $f : \Phi \rightarrow \Psi$ de la catégorie $dg\ Cat_{\mathcal{X}}$ est défini par la donnée de morphismes de dg-modules $f : \Phi(\underline{b}, \underline{a}) \rightarrow \Psi(\underline{b}, \underline{a})$ préservant les morphismes d’identité et les structures de composition des catégories.

On supposera pour des raisons techniques que l’ensemble \mathcal{X} est munie d’une graduation $\deg : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{N}$ à l’instar de l’ensemble des arbres élagués. On considérera alors la sous-catégorie pleine $dg\ Cat_{\mathcal{X}}^+ \subset dg\ Cat_{\mathcal{X}}$ engendrée par les catégories $\Theta \in dg\ Cat_{\mathcal{X}}$ telles que $\Theta(\underline{x}, \underline{x}) = \mathbb{k} 1_{\underline{x}}$, pour tout $\underline{x} \in \mathcal{X}$, et $\Theta(\underline{b}, \underline{a}) = 0$ pour tout couple $\underline{b} \neq \underline{a}$ tel que $\deg(\underline{b}) - \deg(\underline{a}) \leq 0$. On dira que $dg\ Cat_{\mathcal{X}}^+$ est la sous-catégorie des dg-catégories connexes de $dg\ Cat_{\mathcal{X}}$.

6.2. Remarques : une équivalence entre dg-catégories et dg-algèbres. — Si on suppose que l’ensemble \mathcal{X} est fini, alors on a une équivalence de catégories entre les dg-catégories $\Theta \in dg\ Cat_{\mathcal{X}}$ et les dg-algèbres sur l’anneau commutatif $\mathbb{k}_{\mathcal{X}} = \mathbb{k}[1_{\underline{x}}, \underline{x} \in \mathcal{X}]$ engendré comme \mathbb{k} -module par des idempotents orthogonaux $1_{\underline{x}}$, $\underline{x} \in \mathcal{X}$, de sorte que :

$$1_{\underline{b}} \cdot 1_{\underline{a}} = \begin{cases} 1_{\underline{a}}, & \text{si } \underline{a} = \underline{b}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère d’abord la catégorie $dg\ Gr_{\mathcal{X}}$ des dg-graphes sur \mathcal{X} dont les objets sont les collections de dg-modules $\Gamma(\underline{b}, \underline{a})$ indexées par les couples $(\underline{b}, \underline{a}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. On a, lorsque \mathcal{X} est fini, une équivalence de catégories de $dg\ Gr_{\mathcal{X}}$ dans la catégorie des

$\mathbb{k}_{\mathcal{X}}$ -bimodules qui à un dg-graphe Γ associe le dg-module

$$\Gamma_{\mathcal{X}} = \bigoplus_{(\underline{b}, \underline{a}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}} \Gamma(\underline{b}, \underline{a}),$$

muni de la structure de $\mathbb{k}_{\mathcal{X}}$ -bimodule telle que

$$\Gamma(\underline{b}, \underline{a}) = 1_{\underline{a}} \cdot \Gamma_{\mathcal{X}} \cdot 1_{\underline{b}}.$$

Le produit tensoriel de $\mathbb{k}_{\mathcal{X}}$ -bimodules au dessus de $\mathbb{k}_{\mathcal{X}}$ vérifie $N \otimes_{\mathbb{k}_{\mathcal{X}}} M = \bigoplus_{\underline{x} \in \mathcal{X}} (N \cdot 1_{\underline{x}}) \otimes (1_{\underline{x}} \cdot M)$ de sorte que pour les $\mathbb{k}_{\mathcal{X}}$ -bimodules associés à des dg-graphes $\Gamma, \Delta \in dg\ Gr_{\mathcal{X}}$, on a la relation

$$(*) \quad 1_{\underline{a}} \cdot (\Gamma_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathbb{k}_{\mathcal{X}}} \Delta_{\mathcal{X}}) \cdot 1_{\underline{b}} = \bigoplus_{\underline{x} \in \mathcal{X}} \Gamma(\underline{x}, \underline{a}) \otimes \Delta(\underline{b}, \underline{x}).$$

La dg-algèbre associée à une catégorie Θ est définie par le $\mathbb{k}_{\mathcal{X}}$ -bimodule $\Theta_{\mathcal{X}}$ associé au dg-graphe sous-jacent à Θ , muni du morphisme unité $\eta : \mathbb{k}_{\mathcal{X}} \rightarrow \Theta_{\mathcal{X}}$ donné par la somme des morphismes identité de Θ , et du morphisme produit $\mu : \Theta_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathbb{k}_{\mathcal{X}}} \Theta_{\mathcal{X}} \rightarrow \Theta_{\mathcal{X}}$ induit par les morphismes de composition de Θ .

On utilisera cette correspondance de façon heuristique pour transcrire des constructions de l'algèbre différentielle graduée dans le cadre des catégories, sans supposer nécessairement \mathcal{X} fini. Le principe général consiste simplement à remplacer le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{k}_{\mathcal{X}}}$ par son développement $(*)$ pour former l'analogue catégorique des constructions usuelles. On utilisera dans la suite la notation $\otimes_{\mathcal{X}}$ pour désigner le produit tensoriel $(*)$ de dg-graphes sur \mathcal{X} .

6.3. Sur les dg-catégories libres. — Le foncteur d'oubli $U : dg\ Cat_{\mathcal{X}} \rightarrow dg\ Gr_{\mathcal{X}}$ qui applique une dg-catégorie Θ sur son dg-graphe sous-jacent possède ainsi un adjoint à gauche, le foncteur objet libre $F : dg\ Gr_{\mathcal{X}} \rightarrow dg\ Cat_{\mathcal{X}}$, qui applique un dg-graphe Γ sur la dg-catégorie telle que :

$$F(\Gamma)(\underline{b}, \underline{a}) = \bigoplus_{\substack{(\underline{b}, \underline{x}_{m-1}, \dots, \underline{x}_1, \underline{a}) \\ m \geq 0}} \Gamma(\underline{x}_1, \underline{a}) \otimes \Gamma(\underline{x}_2, \underline{x}_1) \otimes \dots \otimes \Gamma(\underline{b}, \underline{x}_{m-1}).$$

La sommation s'étend sur l'ensemble des collections

$$(\underline{x}_m, \dots, \underline{x}_0) \in \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X}, \quad m \geq 0,$$

telles que $\underline{x}_m = \underline{b}$ et $\underline{x}_0 = \underline{a}$. Lorsque $\underline{b} \neq \underline{a}$, ces conditions entraînent $m > 0$. Lorsque $\underline{b} = \underline{a}$, on peut avoir $m = 0$ avec un produit tensoriel associé d'ordre nul retournant donc le dg-module unité $\mathbb{k} \in dg\ Mod$. Le morphisme de composition de $F(\Gamma)$ est donné par la concaténation des tenseurs. Le morphisme d'identité de $F(\Gamma)$ est donné par l'inclusion des tenseurs d'ordre $m = 0$ dans le développement des hom-objets $F(\Gamma)(\underline{x}, \underline{x})$.

On a aussi un morphisme de dg-graphes $\eta : \Gamma \rightarrow F(\Gamma)$ qui identifie $\Gamma(\underline{b}, \underline{a})$ au facteur de $F(\Gamma)(\underline{b}, \underline{a})$ constitué des tenseurs d'ordre $m = 1$. On peut ainsi identifier Γ à un sous-objet de $F(\Gamma)$.

6.4. Homomorphismes de torsion de dg-catégories. — On se donne maintenant une dg-catégorie $\Theta \in dg\text{-}Cat_{\mathcal{X}}$. On dit qu'une collection d'homomorphismes $\partial : \Theta(\underline{b}, \underline{a}) \rightarrow \Theta(\underline{b}, \underline{a})$ définit une dérivation de Θ si on a la relation

$$(*) \quad \partial(\alpha \cdot \beta) = (\partial\alpha) \cdot \beta + \pm\alpha \cdot (\partial\beta),$$

pour tout couple d'éléments composables $\alpha \in \Theta(\underline{x}, \underline{a})$, $\beta \in \Theta(\underline{b}, \underline{x})$, le signe \pm provenant de la commutation de l'homomorphisme ∂ avec l'élément β . On note que la relation $(*)$ entraîne automatiquement que les éléments unités $1_{\underline{x}} \in \Theta(\underline{x}, \underline{x})$ sont annulés par ∂ .

On dit qu'une dérivation constituée d'homomorphismes de torsion $\partial : \Theta(\underline{b}, \underline{a}) \rightarrow \Theta(\underline{b}, \underline{a})$ est une dérivation de torsion de Θ . La relation de dérivation $(*)$ entraîne que les morphismes de compositions et les morphismes d'identités de Θ induisent des morphismes de dg-modules sur les dg-modules tordus $(\Theta(\underline{b}, \underline{a}), \partial)$. Par conséquent, la collection de dg-modules tordus associée à une dérivation de torsion $(\Theta(\underline{b}, \underline{a}), \partial)$, que l'on désignera par la donnée du couple (Θ, ∂) , hérite d'une structure de dg-catégorie.

6.5. Sur les dg-catégories quasi-libres. — On a défini la dg-catégorie libre $F(\Gamma)$ associée à un dg-graphe Γ au §6.3. Une dg-catégorie quasi-libre est une dg-catégorie tordue $(F(\Gamma), \partial)$ associée à une dg-catégorie libre $F(\Gamma)$.

La dg-catégorie libre $F(\Gamma)$ est, d'après la définition du §6.3, engendrée comme dg-module par des tenseurs

$$(*) \quad \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_m \in \Gamma(\underline{x}_1, \underline{x}_0) \otimes \cdots \otimes \Gamma(\underline{x}_m, \underline{x}_{m-1}).$$

Le dg-graphe Γ s'identifie au facteur direct de $F(\Gamma)$ engendré par les tenseurs d'ordre 1. Le morphisme d'inclusion $\Gamma \subset F(\Gamma)$ s'identifie au morphisme universel de la dg-catégorie libre. Les tenseurs $(*)$ représentent en fait la composition des éléments α_i dans $F(\Gamma)$. Les tenseurs $(*)$ d'ordre $m > 1$ engendrent le dg-graphe $Dec F(\Gamma) \subset F(\Gamma)$ des éléments décomposables de $F(\Gamma)$.

Une dérivation de torsion sur une dg-catégorie libre $\partial : F(\Gamma) \rightarrow F(\Gamma)$ est donc déterminée par sa restriction au dg-graphe $\Gamma \subset F(\Gamma)$ puisque la relation de dérivation du §6.4 entraîne que l'on a l'identité

$$\partial(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_m) = \sum_{i=1}^m \pm\alpha_1 \cdot \dots \cdot \partial(\alpha_i) \cdot \dots \cdot \alpha_m$$

pour une telle composition d'éléments.

Le morphisme de dg-catégories $\phi_f : F(\Gamma) \rightarrow \Theta$ associé à un morphisme de dg-graphes $f : \Gamma \rightarrow \Theta$ par la relation d'adjonction de l'objet libre se détermine par la formule

$$\phi_f(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_m) = f(\alpha_1) \cdot \dots \cdot f(\alpha_m)$$

pour un élément composé de $F(\Gamma)$. Le morphisme $f : \Gamma \rightarrow \Theta$ représente en fait la restriction de ϕ_f au dg-graphe $\Gamma \subset F(\Gamma)$.

On étend la définition de ϕ_f aux homomorphismes f de degré 0 pour construire les morphismes sur une dg-catégorie quasi-libre. On constate aisément que l'homomorphisme $\phi_f : (F(\Gamma), \partial) \rightarrow \Theta$ associé à un homomorphisme de dg-graphes $f : \Gamma \rightarrow \Theta$

(de degré 0) définit un morphisme de dg-catégories si et seulement si on a la relation

$$(\ast\ast) \quad \delta f(\alpha) - f(\delta\alpha) = \phi_f(\partial(\alpha))$$

pour tout générateur $\alpha \in \Gamma$.

On reprend maintenant la définition de la construction cobar de [14]. On utilisera l'extension naturelle aux dg-graphes de l'opération de suspension des dg-modules ΣC dont la définition est rappelée au §0.3, ainsi que l'opération inverse de désuspension $\Sigma^{-1}C$.

6.6. La construction cobar appliquée aux dg-cocatégories. — La construction cobar est un foncteur qui applique une dg-cocatégorie sur une dg-catégorie quasi-libre. Les dg-cocatégories sont les structures qui lorsque \mathcal{X} est fini correspondent aux cogèbres augmentées sur $\mathbb{k}_{\mathcal{X}}$ dans le dictionnaire du §6.2.

Une dg-cocatégorie consiste en général en la donnée d'un dg-graphe Γ muni de morphismes de diagonale

$$\Gamma(\underline{b}, \underline{a}) \xrightarrow{\Delta} \bigoplus_{\underline{x} \in \mathcal{X}} \Gamma(\underline{x}, \underline{a}) \otimes \Gamma(\underline{b}, \underline{x})$$

et de morphismes d'augmentation

$$\Gamma(\underline{x}, \underline{x}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{k}$$

satisfaisant les duals naturels des relations d'associativité et d'unité des dg-catégories.

On ne considérera dans la suite que des dg-cocatégories connexes au sens que $\Gamma(\underline{x}, \underline{x}) = \mathbb{k}$, pour tout $\underline{x} \in \mathcal{X}$, et $\Gamma(\underline{b}, \underline{a}) = 0$ pour tout couple $\underline{b} \neq \underline{a}$ tel que $\deg(\underline{b}) - \deg(\underline{a}) \leq 0$. On forme alors le dg-graphe $\tilde{\Gamma}$ tel que :

$$\tilde{\Gamma}(\underline{b}, \underline{a}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \underline{b} = \underline{a}, \\ \Gamma(\underline{b}, \underline{a}), & \text{sinon.} \end{cases}$$

La diagonale de Γ induit un morphisme de degré -1

$$\Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}(\underline{b}, \underline{a}) \xrightarrow{\Delta} \bigoplus_{\underline{x} \in \mathcal{X}} \Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}(\underline{x}, \underline{a}) \otimes \Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}(\underline{b}, \underline{x}) \subset F(\Sigma^{-1}\tilde{\Gamma})(\underline{b}, \underline{a})$$

qui détermine une dérivation ∂ sur la dg-catégorie libre $F(\Sigma^{-1}\tilde{\Gamma})$. On montre aisément que cette dérivation est une dérivation de torsion (on a en fait $\delta(\partial) = 0$ et $\partial^2 = 0$).

La construction cobar de Γ est la dg-catégorie quasi-libre

$$B^c(\Gamma) = (F(\Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}), \partial)$$

associée à la dérivation de torsion ainsi définie.

La construction cobar définit clairement un foncteur sur la catégorie des dg-cocatégories connexes. De plus :

Proposition 6.7. — *Le morphisme de dg-catégories*

$$B^c(f) : B^c(\Gamma) \rightarrow B^c(\Delta)$$

induit par une équivalence faible de dg-cocatégories connexes $f : \Gamma \xrightarrow{\sim} \Delta$ est une équivalence faible, pourvu que les dg-cocatégories Γ et Δ soient cofibrantes comme dg-graphes.

Démonstration. — On applique l'argument spectral standard aux dg-catégories. On observera simplement que l'hypothèse de connexité assure la convergence des suites spectrales utilisées. \square

6.8. *La construction bar appliquée aux dg-catégories.* — Soit $\Theta \in dg\text{-}Cat_{\mathcal{X}}^+$ une dg-catégorie connexe au sens défini au §6.1. On forme le dg-graphe $\tilde{\Theta}$ tel que

$$\tilde{\Theta}(\underline{b}, \underline{a}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \underline{b} = \underline{a}, \\ \Theta(\underline{b}, \underline{a}), & \text{sinon.} \end{cases}$$

La construction bar de Θ est un dg-graphe $B(\Theta)$ défini par les produits tensoriels de dg-modules

$$B(\Theta)(\underline{b}, \underline{a}) = \bigoplus_{\substack{(\underline{b}, \underline{x}_{m-1}, \dots, \underline{x}_1, \underline{a}) \\ m \geq 0}} \Sigma \tilde{\Theta}(\underline{x}_1, \underline{a}) \otimes \Sigma \tilde{\Theta}(\underline{x}_2, \underline{x}_1) \otimes \dots \otimes \Sigma \tilde{\Theta}(\underline{b}, \underline{x}_{m-1}).$$

muni d'un certain homomorphisme de torsion ∂ . Lorsque $\underline{b} \neq \underline{a}$, la somme s'étend sur les collections $(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_m)$ telles que $\underline{x}_i \neq \underline{x}_{i+1}$ et $\deg \underline{x}_{i+1} - \deg \underline{x}_i > 0$, $\forall i$, puisque les dg-modules $\tilde{\Theta}(\underline{x}_{i+1}, \underline{x}_i)$ ne s'annulent pas sous ces conditions seulement. On a alors $\tilde{\Theta}(\underline{x}_{i+1}, \underline{x}_i) = \Theta(\underline{x}_{i+1}, \underline{x}_i)$.

On a par convention $B(\Theta)(\underline{x}, \underline{x}) = \mathbb{k}$ lorsque $\underline{b} = \underline{a} = \underline{x}$. On note aussi que l'on a $B(\Theta)(\underline{b}, \underline{a}) = 0$ pour tout couple $\underline{b} \neq \underline{a}$ tel que $\deg(\underline{b}) - \deg(\underline{a}) \leq 0$.

La différentielle de $B(\Theta)$ est la somme de la différentielle naturelle des tenseurs, induite par la différentielle interne de Θ , et de l'homomorphisme de torsion

$$\partial : B(\Theta)(\underline{b}, \underline{a}) \rightarrow B(\Theta)(\underline{b}, \underline{a})$$

tel que

$$\partial(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_m) = \sum_{i=1}^{m-1} \pm \{ \alpha_1 \otimes \dots \otimes (\alpha_i \cdot \alpha_{i+1}) \otimes \dots \otimes \alpha_m \},$$

pour un tenseur $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_m \in \Sigma \Theta(\underline{x}_1, \underline{x}_0) \otimes \dots \otimes \Sigma \Theta(\underline{x}_m, \underline{x}_{m-1})$. Le signe \pm est déterminé par la commutation, avec les facteurs $\alpha_k \in \Sigma \Theta(\underline{x}_k, \underline{x}_{k-1})$, $k < i$, du morphisme de composition de Θ qui, par suspension, est équivalent à un homomorphisme de degré -1 :

$$\Sigma \Theta(\underline{x}_{i+1}, \underline{x}_i) \otimes \Sigma \Theta(\underline{x}_{i+2}, \underline{x}_{i+1}) \xrightarrow{\mu} \Sigma \Theta(\underline{x}_{i+2}, \underline{x}_i).$$

Lorsque $\Theta = \Omega_n^{epi}$, on retrouve la définition utilisée au §2.

6.9. *La construction cobar-bar appliquée aux dg-catégories.* — La construction bar d'une dg-catégorie $B(\Theta)$ hérite d'une diagonale

$$B(\Theta)(\underline{b}, \underline{a}) \xrightarrow{\Delta} \bigoplus_{\underline{x} \in \mathcal{X}} B(\Theta)(\underline{x}, \underline{a}) \otimes B(\Theta)(\underline{b}, \underline{x})$$

définie composante par composante par les morphismes de déconcaténation

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\{\Sigma\Theta(\underline{x}_1, \underline{a}) \otimes \cdots \otimes \Sigma\Theta(\underline{b}, \underline{x}_{m-1})\}}_{\subset B(\Theta)} \\
 & \rightarrow \underbrace{\{\Sigma\Theta(\underline{x}_1, \underline{a}) \otimes \cdots \otimes \Sigma\Theta(\underline{x}_k, \underline{x}_{k-1})\}}_{\subset B(\Theta)} \\
 & \quad \otimes \underbrace{\{\Sigma\Theta(\underline{x}_{k+1}, \underline{x}_k) \otimes \cdots \otimes \Sigma\Theta(\underline{b}, \underline{x}_{m-1})\}}_{\subset B(\Theta)}.
 \end{aligned}$$

L'identité $B(\Theta)(\underline{x}, \underline{x}) = \mathbb{k}$ nous donne aussi un morphisme de counité sur $B(\Theta)$, de sorte que le dg-graphe $B(\Theta)$ forme une dg-cocatégorie. On note aussi que cette dg-cocatégorie est, d'après les observations du §6.8, connexe au sens défini au §6.6.

On forme la construction cobar associée à $B(\Theta)$. On adoptera la notation $\tilde{\Gamma} = \tilde{B}(\Theta)$ pour le dg-graphe connexe associée à cette dg-cocatégorie $\Gamma = B(\Theta)$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 6.10. —

(1) *L'homomorphisme de dg-graphes $\epsilon : \tilde{B}(\Theta) \rightarrow \Theta$ défini par les projections sur les composantes tensorielles d'ordre $m = 1$ de $B(\Theta)$ induit un morphisme de dg-catégories :*

$$B^c(B(\Theta)) = (F(\Sigma^{-1}\tilde{B}(\Theta)), \partial) \xrightarrow{\epsilon} \Theta.$$

(2) *Et le morphisme d'augmentation $\epsilon : B^c(B(\Theta)) \rightarrow \Theta$ ainsi défini est une équivalence faible.*

Démonstration. — La démonstration de l'assertion (1) se réduit à une vérification facile, laissée en exercice, de la relation (**) du §6.5.

On renvoie à [14, II §4] pour une démonstration de l'assertion (2) dans le cadre des dg-algèbres. \square

Cette construction cobar-bar $B^c(B(\Theta))$ définit ainsi un modèle quasi-libre naturel de Θ dans la catégorie des dg-catégories $dg\text{-}Cat_{\mathcal{X}}$.

6.11. Catégories de diagrammes associées à une dg-catégorie. — La notion de diagramme sur une petite catégorie possède une extension naturelle dans le cadre des dg-catégories : un Θ -diagramme covariant $T : \Theta \rightarrow dg\text{-Mod}$ consiste en la donnée d'une application $T : \mathcal{X} \rightarrow dg\text{-Mod}$ qui associe un dg-module $T(\underline{x}) \in dg\text{-Mod}$ à chaque objet $\underline{x} \in \mathcal{X}$ et de morphismes de dg-modules

$$\Theta(\underline{b}, \underline{a}) \otimes T(\underline{b}) \xrightarrow{T^{\sharp}} T(\underline{a}),$$

pour chaque couple d'objets $(\underline{b}, \underline{a}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, satisfaisant des relations d'unité et d'associativité standard ; la notion de Θ -diagramme contravariant est définie de façon symétrique, avec des morphismes

$$\Theta(\underline{b}, \underline{a}) \otimes S(\underline{a}) \xrightarrow{S^{\sharp}} S(\underline{b})$$

agissant en sens inverse.

La catégorie des diagrammes (covariants) associée à Θ sera notée $dg\text{-Mod}^\Theta$. On a une équivalence formelle entre la catégorie des Θ -diagrammes contravariants et la catégorie des diagrammes covariants sur la dg-catégorie Θ^{op} telle que $\Theta^{op}(\underline{b}, \underline{a}) = \Theta(\underline{a}, \underline{b})$.

Lorsque \mathcal{X} est fini, le dictionnaire de §6.2, donne une équivalence de catégories entre $dg\text{-Mod}^\Theta$ et la catégories des modules à gauche sur la dg-algèbre $\Theta_{\mathcal{X}}$ associée à la dg-catégorie Θ : on associe d'abord à toute collection $T(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathcal{X}$, le dg-module $T_{\mathcal{X}} = \bigoplus_{\underline{x} \in \mathcal{X}} T(\underline{x})$ muni de la structure de $\mathbb{k}_{\mathcal{X}}$ -module telle que $T(\underline{x}) = 1_{\underline{x}} \cdot T_{\mathcal{X}}$; lorsque T est un Θ -diagramme, on a un produit $\Theta_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathbb{k}_{\mathcal{X}}} T_{\mathcal{X}} \rightarrow T_{\mathcal{X}}$ donné composante par composante par l'action de Θ sur T , qui fait de $T_{\mathcal{X}}$ un module sur $\Theta_{\mathcal{X}}$. On a une équivalence de catégories analogue entre la catégorie des diagrammes contravariants $dg\text{-Mod}^{\Theta^{op}}$ et la catégories des modules à droite sur $\Theta_{\mathcal{X}}$.

On s'intéresse aux diagrammes sur une construction cobar $B^c(\Gamma)$. On section de la proposition suivante :

Proposition 6.12. —

(1) *Une collection de dg-modules $T(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathcal{X}$, forme un diagramme sur la dg-catégorie $\text{End}_T \in dg\text{-Cat}_{\mathcal{X}}$ telle que*

$$\text{End}_T(\underline{b}, \underline{a}) = \text{Hom}_{dg\text{-Mod}}(T(\underline{b}), T(\underline{a})).$$

(2) *De plus, munir la collection $T(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathcal{X}$, d'une structure de Θ -diagramme revient à se donner un morphisme de dg-catégories $\phi : \Theta \rightarrow \text{End}_T$.*

Démonstration. — Formel. □

Une structure de $B^c(\Gamma)$ -diagramme covariant sur une collection $T(\underline{b})$, $\underline{b} \in \mathcal{X}$, est donc donnée par un morphisme de dg-catégories $\psi : B^c(\Gamma) \rightarrow \text{End}_T$. Les observations du §6.5 montrent que ce morphisme $\psi = \psi_g$ est déterminé par sa restriction g au dg-graphe $\Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}$, laquelle associe un homomorphisme de dg-modules $\alpha_* : T(\underline{b}) \rightarrow T(\underline{a})$ de degré $d-1$ à chaque morphisme générateur $\alpha \in \Gamma(\underline{b}, \underline{a})$ de degré d , de telle sorte que l'on a la relation

$$\delta(\alpha_*) = \psi_g((\delta + \partial)(\alpha))$$

dans $\text{Hom}_{dg\text{-Mod}}(T(\underline{b}), T(\underline{a}))$. L'homomorphisme $g : \Sigma^{-1}\tilde{\Gamma} \rightarrow \text{End}_T$ est par adjonction équivalent à une collection d'homomorphismes

$$\Gamma(\underline{b}, \underline{a}) \otimes T(\underline{b}) \xrightarrow{g^\sharp} T(\underline{a})$$

de degré -1 .

On a une observation analogue pour les $B^c(\Gamma)$ -diagrammes contravariants car on constate que la catégorie sous-jacente à $B^c(\Gamma)^{op}$ s'identifie à la construction cobar $B^c(\Gamma^{op})$ sur le diagramme Γ^{op} tel que $\Gamma^{op}(\underline{a}, \underline{b}) = \Gamma(\underline{b}, \underline{a})$. Une structure de $B^c(\Gamma)$ -diagramme contravariant sur une collection $S(\underline{a})$, $\underline{a} \in \mathcal{X}$, est donc donnée par un morphisme de dg-catégories $\phi : B^c(\Gamma^{op}) \rightarrow \text{End}_S$. L'homomorphisme $f : \Sigma^{-1}\tilde{\Gamma}^{op} \rightarrow \text{End}_S$ déterminant ce morphisme $\phi = \phi_f$ est par adjonction équivalent à une collection d'homomorphismes

$$\Gamma(\underline{b}, \underline{a}) \otimes S(\underline{a}) \xrightarrow{f^\sharp} S(\underline{b})$$

de degré -1 .

6.13. Complexes à coefficients associés à une construction cobar. — On se donne toujours un couple (S, T) tel que S est un diagramme contravariant et T est un diagramme covariant sur la dg-catégorie $B^c(\Gamma)$ associée à une dg-cocatégorie. On note $S \otimes_{\mathcal{X}} \Gamma \otimes_{\mathcal{X}} T$ le produit tensoriel

$$S \otimes_{\mathcal{X}} \Gamma \otimes_{\mathcal{X}} T = \bigoplus_{(\underline{b}, \underline{a}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}} S(\underline{a}) \otimes \Gamma(\underline{b}, \underline{a}) \otimes T(\underline{b})$$

qui dans notre dictionnaire entre dg-catégorie et dg-algèbre correspond au produit tensoriel sur $\mathbb{k}_{\mathcal{X}}$ des $\mathbb{k}_{\mathcal{X}}$ -modules associés aux collections sous-jacentes des objets S , Γ et T . Ce produit tensoriel est muni d'un homomorphisme de torsion naturel

$$\partial : S \otimes_{\mathcal{X}} \Gamma \otimes_{\mathcal{X}} T \rightarrow S \otimes_{\mathcal{X}} \Gamma \otimes_{\mathcal{X}} T$$

défini composante par composante, pour tout couple de $B^c(\Gamma)$ -diagrammes (S, T) , par l'homomorphisme composé

$$\begin{aligned} & S(\underline{a}) \otimes \Gamma(\underline{b}, \underline{a}) \otimes T(\underline{b}) \\ & \xrightarrow{\Delta_*} \bigoplus_{\underline{x} \in \mathcal{X}} S(\underline{a}) \otimes \Gamma(\underline{x}, \underline{a}) \otimes \Gamma(\underline{b}, \underline{x}) \otimes T(\underline{b}) \\ & \xrightarrow{(f^{\sharp}, g^{\sharp})} \left\{ \bigoplus_{\underline{x} \in \mathcal{X}} S(\underline{x}) \otimes \Gamma(\underline{b}, \underline{x}) \otimes T(\underline{b}) \right\} \oplus \left\{ \bigoplus_{\underline{x} \in \mathcal{X}} S(\underline{a}) \otimes \Gamma(\underline{x}, \underline{a}) \otimes T(\underline{x}) \right\}, \end{aligned}$$

déterminé par la diagonale de Γ et l'action de $\Gamma \subset B^c(\Gamma)$ sur S et T . La relation des homomorphismes de torsion $\delta(\partial) + \partial^2 = 0$ se déduit aisément des équations du §6.5 pour les morphismes ϕ_f et ϕ_g . Par conséquent, on a un dg-module tordu bien défini $(S \otimes_{\mathcal{X}} \Gamma \otimes_{\mathcal{X}} T, \partial)$ naturellement associé à tout couple de $B^c(\Gamma)$ -diagrammes (S, T) . Le complexe bar à coefficients associé à une dg-catégorie connexe Θ s'identifie au complexe tordu $B(S, \Theta, T) = (S \otimes_{\mathcal{X}} B(\Theta) \otimes_{\mathcal{X}} T, \partial)$ associé à la construction bar de Θ .

Le produit tensoriel au-dessus d'une petite catégorie $S \otimes_{\Theta} T$ possède une extension naturelle dans le cadre des dg-catégories. On a aussi une extension naturelle des foncteurs Tor au diagrammes sur une dg-catégorie. Le produit tensoriel $S \otimes_{\Theta} T$ s'identifie en fait au produit tensoriel $S_{\mathcal{X}} \otimes_{\Theta_{\mathcal{X}}} T_{\mathcal{X}}$ des modules associés à S et T sur la dg-algèbre associée à Θ et le foncteur Tor se détermine par les méthodes d'algèbre homologique différentielle standard (on appliquera par exemple [8, §§18-20]).

Les complexes tordus définis au §6.13 satisfont la relation

$$\text{Tor}_*^{B^c(\Gamma)}(S, T) = H_*(S \otimes_{\mathcal{X}} \Gamma \otimes_{\mathcal{X}} T, \partial),$$

pour tout couple de $B^c(\Gamma)$ -diagrammes dg-cofibrants (S, T) , car on a une équivalence faible de dg-cocatégories $\eta : \Gamma \xrightarrow{\sim} B(B^c(\Gamma))$ d'après [14, II §4], et un argument spectral standard nous permet de comparer le complexe $(S \otimes_{\mathcal{X}} \Gamma \otimes_{\mathcal{X}} T, \partial)$ au complexe bar à coefficients $B(S, B^c(\Gamma), T) = (S \otimes_{\mathcal{X}} B(B^c(\Gamma)) \otimes_{\mathcal{X}} T, \partial)$ calculant $\text{Tor}_*^{B^c(\Gamma)}(S, T)$.

7. Construction cobar et modèle minimal de la catégorie des arbres élagués. — La construction bar $B(\Omega_n^{epi})$ du §2 s'identifie à la construction bar de la catégorie enrichie en \mathbb{k} -modules Ω_n^{epi} vue comme une dg-catégorie concentrée en degré 0. Cette construction bar hérite d'après l'observation du §6.9 d'une diagonale

$$B(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) \xrightarrow{\Delta} \bigoplus_{\underline{\theta}} B(\Omega_n^{epi})(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) \otimes B(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\theta}),$$

qui en fait une dg-cocatégorie connexe. Si on revient à la définition du §2, alors cette diagonale est donnée par la formule

$$\Delta\{\underline{\tau}_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_d} \underline{\tau}_d\} = \sum_{k=0}^d \{\underline{\tau}_0 \xleftarrow{u_1} \cdots \xleftarrow{u_k} \underline{\tau}_k\} \otimes \{\underline{\tau}_k \xleftarrow{u_{k+1}} \cdots \xleftarrow{u_d} \underline{\tau}_d\}$$

pour les générateurs de $B(\Omega_n^{epi})$.

Le dg-graphe $K(\Omega_n^{epi})$ est muni, à l'instar de la construction bar $B(\Omega_n^{epi})$, d'une diagonale coassociative

$$K(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) \xrightarrow{\Delta} \bigoplus_{\underline{\theta}} K(\Omega_n^{epi})(\underline{\theta}, \underline{\sigma}) \otimes K(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\theta}),$$

qui est simplement définie par la formule

$$\Delta\{u\} = \sum_{u=vw} \{v\} \otimes \{w\}$$

pour tout morphisme $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$. On a aussi l'identité $K(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\tau}) = \mathbb{k}$, pour tout $\underline{\tau} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}$.

La construction de Koszul $K(\Omega_n^{epi})$ forme ainsi une dg-cocatégorie connexe. On utilise la notation $\widetilde{\Gamma} = \widetilde{K}(\Omega_n^{epi})$ pour le dg-graphe connexe associé à cette dg-cocatégorie $\Gamma = K(\Omega_n^{epi})$.

On peut donc appliquer la construction cobar à $K(\Omega_n^{epi})$ pour obtenir une dg-catégorie quasi-libre

$$B^c(K(\Omega_n^{epi})) = (F(\Sigma^{-1} \widetilde{K}(\Omega_n^{epi})), \partial)$$

associée à Ω_n^{epi} . La dérivation de torsion de $B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ est donnée par la formule

$$\partial\{u\} = \sum_{u=vw} (-1)^{\deg v} \cdot \{v\} \otimes \{w\},$$

pour tout élément générateur $\{u\} \in K(\Omega_n^{epi})(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$. Le signe additionnel $\pm = (-1)^{\deg v}$ provient de la commutation implicite d'une désuspension avec le facteur $\{v\} \in \widetilde{K}(\Omega_n^{epi})(\underline{\theta}, \underline{\sigma})$ dans la définition catégorique de ∂ au §6.6.

On constate immédiatement que :

Observation 7.1. — *Le morphisme de dg-graphes $K(\Omega_n^{epi}) \xrightarrow{\iota} B(\Omega_n^{epi})$ défini par la Proposition 2.4 est un morphisme de dg-cocatégories.*

On a donc, par fonctorialité de la construction cobar, un morphisme de dg-catégories

$$B^c(K(\Omega_n^{epi})) \xrightarrow{B^c(\iota)} B^c(B(\Omega_n^{epi}))$$

qui, par composition avec l'augmentation de $B^c(B(\Omega_n^{epi}))$, munit la dg-catégorie $B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ d'une augmentation sur Ω_n^{epi} . On obtient, par inspection des constructions, que le morphisme d'augmentation

$$\epsilon : B^c(K(\Omega_n^{epi})) \xrightarrow{\sim} \Omega_n^{epi}$$

est défini sur les générateurs du dg-graphe $K(\Omega_n^{epi})$ par :

$$\epsilon\{u\} = \begin{cases} \text{sgn}(u) \cdot \{u\}, & \text{si } \deg u = 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le résultat du Théorème 3.9 entraîne :

Lemme 7.2. — *Le morphisme de dg-cocatégories $\iota : K(\Omega_n^{epi}) \rightarrow B(\Omega_n^{epi})$ induit une équivalence faible au niveau des constructions cobar*

$$\iota_* : B^c(K(\Omega_n^{epi})) \xrightarrow{\sim} B^c(B(\Omega_n^{epi})). \quad \square$$

On en conclut :

Théorème 7.A. — *La construction $R(\Omega_n^{epi}) = B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ définit un modèle quasi-libre de Ω_n^{epi} dans la catégorie des dg-catégories.* \square

Ce modèle quasi-libre $R(\Omega_n^{epi}) = B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ est minimal au sens que le dg-graphe $K(\Omega_n^{epi})$ est muni d'une différentielle interne triviale et la différentielle de la construction cobar $B^c(K(\Omega_n^{epi})) = (F(\Sigma^{-1}\tilde{K}(\Omega_n^{epi})), \partial)$ applique les éléments générateurs sur des éléments décomposables.

On sait que Ω_n^{epi} est engendrée comme catégorie par les morphismes de degré 1. La relation $H_0(B^c(K(\Omega_n^{epi}))) = \Omega_n^{epi}$ entraîne la propriété supplémentaire suivante qui n'est pas apparente dans la définition du §1.1 :

Corollaire. — *Les relations entre morphismes de degré 1 de Ω_n^{epi} sont engendrées par les identités quadratiques définies par les diagrammes des figures 4, 5, 6 de la Proposition 2.4.*

Cette assertion, démontrée au niveau des \mathbb{k} -modules, reste valable pour la catégorie ensembliste Ω_n^{epi} puisque la version enrichie en \mathbb{k} -modules de Ω_n^{epi} est définie par les \mathbb{k} -modules librement engendrés par les morphismes ensemblistes de Ω_n^{epi} .

On a donc, en corollaire du Théorème 7.A, une présentation par générateurs et relations de Ω_n^{epi} . Le résultat de ce corollaire peut également se déduire, dans l'esprit de [6], d'une identification de Ω_n^{epi} avec un produit en couronne itérée de catégories.

On s'intéresse maintenant aux diagrammes sur la dg-catégorie $B^c(K(\Omega_n^{epi}))$. Les observations suivant la Proposition 6.12 entraînent le résultat suivant :

Proposition 7.3. —

(1) *Munir une collection de dg-modules $T(\underline{\tau})$, $\underline{\tau} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}$, d'une structure de diagramme covariant sur $R(\Omega_n^{epi}) = B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ revient à associer à tout morphisme $u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$ un homomorphisme de dg-modules de degré $\deg(u) - 1$*

$$u_* : T(\underline{\tau}) \rightarrow T(\underline{\sigma})$$

de telle sorte que les équations

$$\delta(u_*) = \sum_{u=vw} (-1)^{\deg v} \cdot v_* w_*$$

sont satisfaites dans $\text{Hom}_{dg\text{-Mod}}(T(\underline{\tau}), T(\underline{\sigma}))$, la somme s'étendant sur l'ensemble des décompositions $u = vw$ dans la catégorie Ω_n^{epi} .

(2) *Symétriquement, munir une collection de dg-modules $S(\underline{\tau})$, $\underline{\tau} \in \text{Ob } \Omega_n^{epi}$, d'une structure de diagramme contravariant sur $R(\Omega_n^{epi})$ revient à associer à tout morphisme $u \in \text{Mor}_{\Omega_n^{epi}}(\underline{\tau}, \underline{\sigma})$ un homomorphisme de dg-modules de degré $\deg(u) - 1$*

$$u^* : S(\underline{\sigma}) \rightarrow S(\underline{\tau})$$

de telle sorte que les équations

$$\delta(u^*) = \sum_{u=vw} (-1)^{\deg v} \cdot w^* v^*$$

sont satisfaites dans $\text{Hom}_{dg\text{-Mod}}(S(\underline{\sigma}), S(\underline{\tau}))$.

□

7.4. *Construction cobar de la construction de Koszul et complexes à coefficients.* — On a défini au §§3-4 des complexes à coefficients $B(S, \Omega_n^{epi}, T)$ et $K(S, \Omega_n^{epi}, T)$ tels que

$$H_*(K(S, \Omega_n^{epi}, T)) = H_*(B(S, \Omega_n^{epi}, T)) = \text{Tor}_*^{\Omega_n^{epi}}(S, T),$$

pour tout couple de Ω_n^{epi} -diagrammes dg-cofibrants.

Le complexe $B(S, \Omega_n^{epi}, T)$ utilisé aux §§3-4 s'identifie au complexe tordu associé à la dg-cocatégorie $\Gamma = B(\Omega_n^{epi})$ dans le §6.13. Le complexe $K(S, \Omega_n^{epi}, T)$ s'identifie de même au complexe tordu du §6.13 associé à la dg-cocatégorie $\Gamma = K(\Omega_n^{epi})$. La construction de §6.13 donne donc une extension des complexes à coefficients du §3 aux $B^c(\Gamma(\Omega_n^{epi}))$ -diagrammes, pour $\Gamma = B, K$. Tout $B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ -diagramme hérite d'une structure de $B^c(B(\Omega_n^{epi}))$ -diagramme par restriction de structure. On peut montrer par un argument spectral standard que le morphisme de dg-cocatégories $\iota : K(\Omega_n^{epi}) \rightarrow B(\Omega_n^{epi})$ induit une équivalence faible

$$\kappa : K(S, \Omega_n^{epi}, T) \xrightarrow{\sim} B(S, \Omega_n^{epi}, T),$$

pour tout couple de $B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ -diagrammes dg-cofibrants, et on en déduit l'existence de relations

$$H_*(K(S, \Omega_n^{epi}, T)) = H_*(B(S, \Omega_n^{epi}, T)) = \text{Tor}_*^{B^c(K(\Omega_n^{epi}))}(S, T).$$

Ces identités étendent les résultats obtenus au §4 lorsque (S, T) est un couple de Ω_n^{epi} -diagrammes.

Postlude : applications aux complexes bar itérés

Le complexe bar n -itéré $B^n(A)$ d'une algèbre commutative A s'identifie, dans l'idée de [19], au complexe $C_*(\underline{B}^n(A)) = K(b_n, \Omega_n^{epi}, \underline{B}^n(A))$, pour un Ω_n^{epi} -diagramme $\underline{B}^n(A)$ associé à A . On a explicitement $\underline{B}^n(A)(\underline{\tau}) = A^{\otimes In \underline{\tau}}$ et le morphisme $u_* : A^{\otimes In \underline{\tau}} \rightarrow A^{\otimes In \underline{\sigma}}$ associé à un morphisme $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$ de Ω_n^{epi} effectue le produit des facteurs $A^{\otimes u^{-1}(i)}$, $i \in In \underline{\sigma}$, associés aux fibres de l'application $u : In \underline{\tau} \rightarrow In \underline{\sigma}$:

$$u_*(\bigotimes_{j \in In \underline{\tau}} a_j) = \bigotimes_{i \in In \underline{\sigma}} \left\{ \mu \left(\bigotimes_{j \in u^{-1}(i)} a_j \right) \right\},$$

où l'application μ renvoie au produit de A .

On montre dans [10] que la définition du complexe bar n -itéré $B^n(A)$ s'étend aux algèbres sur une E_n -opérade et détermine l'homologie $H_*^{E_n}(A)$ naturellement associée à cette catégorie d'algèbre. Ce complexe bar n -itéré est défini par un dg-module tordu $B^n(A) = (T^n(A), \partial)$ pour un foncteur sous-jacent de la forme $T^n(A) = \bigoplus_{\underline{\tau}} A^{\otimes In \underline{\tau}}$, avec un décalage en degré implicite donné par l'insertion de suspensions sur les sommets de $\underline{\tau}$.

On fixe une E_n -opérade, soit E_n . Si on reprend soigneusement la construction effective de l'homomorphisme de torsion de $B^n(A)$, telle qu'elle est donnée dans [10, §A.13], alors on constate que cet homomorphisme $\partial : T^n(A) \rightarrow T^n(A)$ possède une composante $\partial_u : A^{\otimes In \underline{\tau}} \rightarrow A^{\otimes In \underline{\sigma}}$, associée à chaque morphisme $u : \underline{\tau} \rightarrow \underline{\sigma}$ de Ω_n^{epi} , qui est donnée par une expression de la forme

$$\partial_u(\bigotimes_{j \in In \underline{\tau}} a_j) = \bigotimes_{i \in In \underline{\sigma}} \left\{ \pi_i \left(\bigotimes_{j \in u^{-1}(i)} a_j \right) \right\},$$

où les applications π_i renvoient à des opérations de l'opérade E_n . On comprend en outre que l'équation donnée dans [10, §A.13] s'interprète comme une relation $\delta(\partial_u) = \sum_{u=vw} \partial_v \partial_w$ dans $\text{Hom}_{dg\text{-Mod}}(A^{\otimes In \underline{\tau}}, A^{\otimes In \underline{\sigma}})$. On en conclut, par application de la Proposition 7.3 et de la définition du §6.13 :

- la collection de dg-modules $\underline{B}^n(A)(\underline{\tau}) = A^{\otimes In \underline{\tau}}$ associée à une E_n -algèbre A hérite d'une structure de $B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ -diagramme telle que $u_* = \partial_u$ donne l'action des éléments générateurs $\{u\} \in K(\Omega_n^{epi})$ sur $\underline{B}^n(A)$,
- le complexe bar itéré associé à A s'identifie au complexe de Koszul $K(b_n, \Omega_n^{epi}, \underline{B}^n(A))$ associé à ce $B^c(K(\Omega_n^{epi}))$ -diagramme $\underline{B}^n(A)$, pour toute E_n -algèbre A .

On note que le diagramme $\underline{B}^n(A)$ est dg-cofibrant dès lors que la E_n -algèbre A est cofibrante comme dg-module. On obtient donc par la généralisation du Théorème 4.A établie au §7.4 :

Théorème A. — *On a les identités :*

$$H_*(B^n(A)) = H_*(K(b_n, \Omega_n^{epi}, \underline{B}^n(A))) = \text{Tor}_*^{B^c(K(\Omega_n^{epi}))}(b_n, \underline{B}^n(A))$$

pour toute E_n -algèbre A qui est cofibrante comme dg-module. □

Ce théorème donne la généralisation du résultat principal de [19] aux algèbres sur une opérade E_n .

On déduit ensuite du théorème principal de [10] :

Théorème B. — *On a l'identité :*

$$H_*^{\mathsf{E}_n}(A) = \mathrm{Tor}_*^{B^c(K(\Omega_n^{epi}))}(b_n, \underline{B}^n(A))$$

pour toute E_n -algèbre A qui est cofibrante comme dg-module. \square

Remarque. — La relation du Théorème B suppose que le foncteur Tor s'annule en degré $* > 0$ lorsque A est une E_n -algèbre libre $A = \mathsf{E}_n(C)$. La démonstration de l'acyclicité de $B^n(\mathsf{E}_n(C))$ dans [10, §8] fait appel à une opération de Browder intervenant dans la composante $\partial : A^{\otimes In} \underline{y}_n \rightarrow A^{\otimes In} \underline{i}_n$ de la différentielle de $B^n(A)$ associée au morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|c|} \hline & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \end{array}$$

(les notations \underline{y}_n et \underline{i}_n reprennent la forme de ces arbres). Ce morphisme doit donc agir par une opération de degré $* > 0$ pour que le diagramme $\underline{B}^n(A)$ donne le bon résultat. Ceci donne une obstruction à avoir une action stricte de la catégorie Ω_n^{epi} sur la collection $A^{\otimes In} \underline{\tau}$, $\underline{\tau} \in \mathrm{Ob} \Omega_n^{epi}$, lorsqu'on étend la construction aux algèbres sur une E_n -opérade.

Références

- [1] M.A. Batanin, *Monoidal globular categories as a natural environment for the theory of weak n -categories*, Adv. Math. **136** (1998), 39–103.
- [2] ———, *The Eckmann-Hilton argument and higher operads*, Adv. Math. **217** (2008), 334–385.
- [3] ———, *Symmetrization of n -operads and compactification of real configuration spaces*, Adv. Math. **211** (2007), 684–725.
- [4] M.A. Batanin, R. Street, *The universal property of the multitude of trees*, J. Pure Appl. Algebra **154** (2000), 3–13.
- [5] C. Berger, *Opérades cellulaires et espaces de lacets itérés*, Ann. Inst. Fourier **46** (1996), 1125–1157.
- [6] ———, *Iterated wreath product of the simplex category and iterated loop spaces*, Adv. Math. **213** (2007), 230–270.
- [7] A. Björner, M.L. Wachs, *On lexicographically shellable posets*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 323–341.
- [8] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, *Rational homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics **205**, Springer-Verlag, 2001.
- [9] R. Fox, L. Neuwirth, *The braid groups*, Math. Scand. **10** (1962), 119–126.
- [10] B. Fresse, *Iterated bar complexes of E -infinity algebras and homology theories*, prépublication arXiv:0810.5147 (2008).
- [11] E. Getzler, J.D.S. Jones, *Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces*, prépublication arXiv:hep-th/9403055 (1994).

- [12] P. Hirschhorn, *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs **99**, American Mathematical Society, 2003.
- [13] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs **63**, American Mathematical Society, 1999.
- [14] D. Husemoller, J.C. Moore, J. Stasheff, *Differential homological algebra and homogeneous spaces*, J. Pure Appl. Algebra **5** (1974), 113-185.
- [15] A. Joyal, *Disks, duality and Θ -categories*, prépublication (1997).
- [16] B. Keller, *On differential graded categories*, in “International Congress of Mathematicians (Madrid, 2006), Vol. II”, Eur. Math. Soc. (2006), 151–190.
- [17] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture*, in “Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I”, Math. Phys. Stud. **21**, Kluwer Acad. Publ. (2000), 255–307.
- [18] K. Lefèvre-Hasegawa, *Sur les A -infini catégories*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 2003.
- [19] M. Livernet, B. Richter, *An interpretation of E_n -homology as functor homology*, prépublication [arXiv:0907.1283](https://arxiv.org/abs/0907.1283) (2009).
- [20] J.-L. Loday, *Cyclic homology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **301**, Springer-Verlag, 1992.
- [21] S. Mac Lane, *Homology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **114**, Springer-Verlag, 1963.
- [22] R.J. Milgram, *Iterated loop spaces*, Ann. Math. **84** (1966), 386–403.
- [23] S.B. Priddy, *Koszul resolutions*, Trans. Amer. Math. Soc. **152** (1970), 39–60.
- [24] H. Schubert, *Kategorien I, II*, Heidelberger Taschenbücher **65-66**, Springer-Verlag, 1970.

29 septembre 2009 (manuscrit révisé le 7 février 2010)

BENOIT FRESSE, UMR 8524 de l’Université Lille 1 - Sciences et Technologies -
et du CNRS, Cité Scientifique – Bâtiment M2, F-59655 Villeneuve d’Ascq Cédex (France)
E-mail : Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr
Url : <http://math.univ-lille1.fr/~fresse>